Die spontane Strategieentdeckung in der Arithmetik

Elsbeth Stern

In: H. Mandl & H.F. Friedrich (Hrsg.), Lern- und Denkstrategien, (S. 101-123).

Göttingen: Hogrefe.

Reprint 3/1992

Die spontane Strategieentdeckung in der Arithmetik

Elsbeth Stern
Max-Planck-Institut für Psychologische Forschung, München

1 Einleitung

Lehrer kann es zur Verzweiflung bringen: In mehreren Stunden wurde im Rechenunterricht die Technik des Zerlegens bei der Addition zweistelliger Zahlen durchgenommen: 32+13= wird errechnet, indem die Aufgabe in 32+10+3= zerlegt wird. Bittet der Lehrer ein Kind nach Abschluß der Unterrichtseinheit o.g. Aufgabe zu lösen, wird er nicht selten erleben, daß das Kind die Aufzählstrategie benutzt und die Aufgabe wie folgt rechnet: "33,34,35 .... 45". Daraufhin stellt der Lehrer eine Aufgabe, die mit der Aufzählmethode kaum noch gelöst werden kann, z.B. 35+43=. Einige Kinder werden sich der Zerlegungsstrategie erinnern und wie erwartet 35+40+3= rechnen, andere Kinder werden die Aufgabe überhaupt nicht in Angriff nehmen, weil sie ihnen zu kompliziert erscheint und wieder andere werden die altbewährte Aufzählstrategie anwenden und irgendwann aufgeben, weil sie in Konfusion gerieten. Der Lehrer wird frustriert feststellen, daß sein Ziel, den Kindern eine effizientere Methode beizubringen, nur teilweise erreicht wurde. Dennoch wird irgendwann auch das letzte Kind die Aufzählstrategie durch die Zerlegungsstrategie ersetzt haben. Aber in der Zwischenzeit haben sich bei den "umständlichen" Kindern möglicherweise die Defizite gehäuft, ihr Dasein als "Mathematikversager" ist vorprogrammiert.

Für den Lehrer wie für den Wissenschaftler stellen sich vor allem zwei Fragen: 1. Wie und unter welchen Voraussetzungen wird strategisch geschicktes Vorgehen erworben? 2. Wie kann man den Erwerb neuer, effizienterer Strategien fördern?

Die Menge der in den letzten Jahren entstandenen Arbeiten zum Strategieerwerb sowohl aus dem kognitions- wie auch aus dem pädagogisch-psychologischen Lager ist unüberschaubar. Die wohl präzisesten - und auf dem Computer simulierten - Modellvorstellungen zum Erwerb strategisch geschickten Verhaltens hat Robert Siegler an der Carnegie-Mellon University in Pittsburgh entwickelt. Die Auseinandersetzung mit seiner neueren Arbeit (Siegler, 1989) steht im Mittelpunkt dieses Kapitels. Es soll überprüft werden, inwieweit sich Sieglers Befunde zur Entdeckung und Anwendung der Min-Strategie bei der Addition von Zahlen (die kleinere Zahl wird auf die größere aufgezählt) durch Vorschulkinder auf Grundschulkinder übertragen lassen. Am Beispiel sogenannter Inversionsaufgaben, z.B. a+b-b=, wird untersucht, ob Kinder die Abkürzungsstrategie entdecken, d.h. ob sie ohne zu rechnen erkennen, daß das Ergebnis von a+b-b= a sein muß. In enger Anlehnung an Sieglers Arbeiten zur Entdeckung der "Min-Strategie" bei der Addition (Siegler, 1989) werden zunächst Merkmale der spontanen Strategieentdeckung beschrieben. Darüber hinaus werden Unterschiede zwischen Kindern, die die Strategie entdeckt haben und Kindern, denen dies nicht gelang, erörtert. Schließlich werden Ergebnisse zu dem Versuch präsentiert, die Entdeckung der Strategie durch gezielte Hinweise vom Versuchsleiter auszulösen. In der Diskussion werden Möglichkeiten und Grenzen der Strategievermittlung erörtert.

2 Zum Strategiebegriff

Kognitive Prozesse, die sich mit den Begriffen Flexibilität, Zielorientiertheit und Effizienz charakterisieren lassen, werden unter dem Begriff "Strategie" zusammengefaßt. Dies ist der Minimalkonsens in der ansonsten verwirrenden Vielfalt von Strategiekonzepten in der Literatur, über die Pressley, Forrest-Pressley, Elliot-Faust und Miller (1985) einen Überblick geben. Unter Berücksichtigung unterschiedlichster Forschungsansätze kommen die Autoren zu folgender Definition: "Zusammengefaßt läßt sich sagen: Eine Strategie ist zusammengesetzt aus kognitiven Operationen, die den aufgabenspezifischen Prozeduren übergeordnet sind, wobei es sich um einzelne Operationen wie auch um Sequenzen von Operationen handeln kann. Strategien zielen auf eine kognitive Leistung ab (z.B. Verstehen, Memorieren) und sind überwiegend bewußt und kontrollierbar" (S. 4, Übersetzung der Autorin).

Bisanz und LeFevre (1990) heben die Unterscheidung zwischen Prozedur und Strategie hervor. Ein wichtiges Charakteristikum der Strategie ist für die Autoren der Entscheidungsspielraum: Von strategischem Vorgehen kann man nur sprechen, wenn eine Person zwischen verschiedenen Lösungswegen wählen kann. Das Lösen der Aufgabe 2+4= ist nach Bisanz und LeFevre für Erwachsene kein strategisches Vorgehen, weil für diese nur Retrieval aus dem Langzeitspeicher als Lösungsweg in Frage kommt. Solange das Ergebnis von 2+4= hingegen noch nicht als sicher abrufbares Faktenwissen abgespeichert ist, muß zwischen unterschiedlichen Lösungswegen ausgewählt werden. Ein Erstkläßler kann die Aufgabe lösen, indem er eine Zahl aus dem Langzeitspeicher abruft und so mit hohem Fehlerrisiko schnell zu einem Ergebnis kommen. Der Erstkläßler kann aber auch "auf Nummer sicher" gehen und die aufwendige Zählstrategie wählen.

Ein Kompromiß bezüglich Fehlerrisiko und Geschwindigkeit wäre die Wahl der "Min-Strategie", bei der die kleinere Zahl auf die größere aufgezählt wird. Strategisches Verhalten bedeutet auch, die Wahl des Lösungsweges von der konkreten Situation abhängig zu machen: Wird genaues Rechnen gefordert, ist eine zeitaufwendige, aber sichere Prozedur angemessen. Wird z.B. in einem Speedtest schnelles Rechnen gefordert, kann die Retrieval-Strategie trotz des erhöhten Fehlerrisikos das bessere Gesamtergebnis liefern.

Ein anschauliches Beispiel zur Unterscheidung zwischen Prozedur und Strategie aus der Wildwestszene (Bisanz & LeFevre, 1990) ist das Heranpirschen des Revolverhelden an das Opfer, sowie die Wahl der Position und des Einschußzieles sind strategisches Vorgehen. Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, zwischen denen der Revolverheld wählen muß. Das Zielen und das Auslösen des Schusses ist hingegen keine Strategie, sondern eine Prozedur, es gibt nur eine optimale Vorgehensweise.

Gemeinsam sind der Prozedur und der Strategie, daß beide mit dem Motiv verknüpft sind, ein Ziel auf optimale Weise zu erreichen. Während bei der Prozedur die einzelnen Schritte festgelegt sind und der Lernprozeß darin besteht, die Abfolge dieser zu optimieren, gibt es bei der Strategie keinen vorher bekannnten und festgelegten Handlungsablauf.

Prozeduren erwirbt man vorwiegend durch wiederholtes Üben. Der Erwerb und die Vermittlung von Strategien ist hingegen sehr viel komplexer und schlechter faßbar. Es geht nicht darum, mehrere Handlungsschritte in der richtigen Reihenfolge zu lernen, sondern frühere Erfahrungen in optimaler Weise auf neue Situationen zu übertragen. Ein optimales Ergebnis kann nur erzielt werden, wenn erkannt wird, wann vertraute Prozeduren angewendet werden können und wann nicht. Bisanz und LeFevre (1990) heben hervor, daß ein Strategiekonzept ohne Berücksichtigung der bestehenden Wissensrepräsentationen sinnlos ist. Strategisches Verhalten ist nur möglich, wenn eine gut organisierte Wissensstruktur vorliegt, auf deren Grundlage neues Wissen aufgebaut werden kann.

3 Der spontane Strategieerwerb

Strategisches Vorgehen setzt voraus, daß das angestrebte Ziel und der Wunsch nach seiner optimalen Erlangung aktiviert sind. Unter dieser Vorgabe wird bereits repräsentiertes Wissen auf seine Brauchbarkeit bei der Lösung eines Problems überprüft.

Die Suche nach einer effizienteren Vorgehensweise kann aufgrund externer Anregung oder spontan geschehen. Führt ein Lehrer im Schulunterricht eine neue Strategie ein, z.B. die Zerlegungsstrategie bei der Addition (s.o.), wird er feststellen, daß einige Kinder diese bereits beherrschen und anwenden. Wie und unter welchen Voraussetzungen eine Strategie spontan erworben wird, hat Siegler (1989) am Beispiel der Min-Strategie untersucht. Mit Sieglers Arbeit liegt ein Modell zum Erwerb und zur Anwendung von Strategien vor, das aufgrund seines hohen Präzisionsgrades eine Reihe von Anregungen für empirische Untersuchungen bietet.

3.1 Sieglers Modell des Strategieerwerbs

Siegler hat sich mit dem Erwerb von Strategien in unterschiedlichen Gebieten befaßt: Beim Lösen von Balanceaufgaben, bei Aufgaben der Grundrechenarten und dem Vokabellernen (Siegler, 1986). Über verschiedene Domänen hinweg konnte er beobachten, daß erfolgreichen Kindern eine Reihe unterschiedlicher Strategien zur Verfügung stehen und zunächst auch alle genutzt werden. Erst später setzt sich eine Strategie durch. Sieglers Modell erklärt, wie es dazu kommt, daß irgendwann das Ergebnis einer einfachen Arithmetikaufgabe nicht mehr ausgerechnet, sondern aus dem Langzeitspeicher abgerufen wird. Jedes Ausrechnen des richtigen Ergebnisses führt zu einem Anstieg der Assoziationsstärke zwischen der Aufgabe und dem Ergebnis, jedes falsche Ergebnis führt zu einer Schwächung. Überschreitet die Assoziationsstärke eine bestimmte Höhe, führt die Retrieval-Strategie zum Erfolg und wird zur bevorzugten Strategie. Für die Addition (Siegler & Shrager, 1984), für die Subtraktion (Siegler, 1987) und für die Multiplikation konnte Siegler (1988) einen hohen Zusammenhang zwischen der Aufgabenschwierigkeit und der Anwendung von Rechenprozeduren nachweisen. Bei schwierigeren Aufgaben verlassen sich die Kinder nicht auf das aus dem Langzeitspeicher abgerufene Ergebnis, sondern rechnen nochmal nach. Mit zunehmender Übung wird erkannt und berücksichtigt, daß einige Strategien sich zur Lösung bestimmter Aufgaben besser eignen als andere.

Nachdem Siegler die Auswahl und die Anwendung unterschiedlicher Strategien erklären konnte, wendete er sich der Entdeckung neuer Strategien zu. Unter welchen Voraussetzungen wird entdeckt, daß eine Aufgabe deutlich einfacher gelöst werden kann als mit den bisher angewendeten Strategien? Gilt für die Strategieentdeckung die Volksweisheit "Not macht erfinderisch?", d.h. wird die Entdeckung einer Strategie beschleunigt, wenn Aufgaben gestellt werden, die mit dieser Strategie optimal gelöst werden können? Welchen Anteil hat das bewußte Erleben an der Entdeckung einer Strategie? Ist die Entdeckung einer neuen Strategie mit dem Aha-Erlebnis zu beschreiben, fallen einem also nach der Entdeckung der neuen Strategie "die Schuppen von den Augen"?

Sieglers Erkenntnisse basieren im wesentlichen auf Daten, die er mit Hilfe der von ihm so bezeichneten "microgenetic method" erhob (im weiteren eingedeutscht mit "Mikrogenetischer Ansatz"). Über mehrere Wochen hinweg ließ Siegler (1989) in regelmäßigen Abständen Vorschulkinder einstellige Additionsaufgaben lösen und zeichnete dies auf Video auf. Zu Beginn wendeten alle Kinder die Summenstrategie an, d.h. sie lösten die Aufgabe 3+4=, indem sie die beiden Summanden mit den Fingern aufzählen: "1,2,3,1,2,3,4", und anschließend die Finger zählen: "1,2,3,4,5,6,7". Ein Teil der Kinder hatte irgendwann spontan diese Vorgehensweise durch die Min-Strategie ersetzt und die Aufgabe durch das Aufzählen der kleineren Zahl auf die größere gelöst: "4,..5,6,7". Es liegen somit - meines Wissens erstmals - systematisch erhobene Beobachtungsdaten zum spontanen und beiläufigen Strategieerwerb vor. Mit diesen Daten zeigt Siegler, daß eine Reihe von - zum Teil aus der Alltagspsychologie übernommenen - Vorstellungen relativiert werden müssen, wie im folgenden erörtert wird.

3.1.1 Zum Zusammenhang zwischen Strategieentdeckung und Strategieanwendung

Aus alltagspsychologischer Sicht gibt es keinen vernünftigen Grund, eine einmal entdeckte effektive Strategie nicht sofort anzuwenden. Dennoch war einer der deutlichsten Befunde bei Siegler die Tatsache, daß die einmal entdeckte Min-Strategie niemals sofort angewendet wurde.

Sieglers Videoaufnahmen stellen ein eindrucksvolles Zeugnis einer Strategieent-entdeckung dar. Der Zeitpunkt der Strategieentdeckung ließ sich bei allen Kindern feststellen: Die Min-Strategie wurde während des Lösens einer Additionsaufgabe entdeckt. Es zeigte sich eine deutliche Verlängerung der Bearbeitungszeit. Die Kinder starteten mit der gewohnten Summenstrategie, d.h. sie zählen jeden Summanden, mitten in der Prozedur brachen sie ab, überlegten kurz und zählten dann die kleinere Zahl auf die größere auf. In den folgenden Durchgängen geriet die Min-Strategie offensichtlich erst einmal in Vergessenheit, es wurde wieder die Summenstrategie angewendet. Siegler (1989, S. 111) berichtet, daß das Kind mit dem höchsten prozentualen Anteil der Min-Stategie an den insgesamt benutzten Strategien in den 84 nach der Entdeckung gestellten Aufgaben nur siebenmal die Min-Strategie angewendet hat. Dieser Befund ist unvereinbar mit der Auffassung, die Entdeckung einer neuen Strategie sei der Heureka-Legende vergleichbar.

Dabei ist diese Legende ein strapaziertes Beispiel, wenn es um die Beschreibung neuer Erkenntnisse geht. Die Beobachtung der Wasserverdrängung durch den eigenen Körper in der Badewanne inspirierte Archimedes bei der Lösung des vom Tyrannen von Syracus gestellten Problems: Er, Archimedes, sollte herausfinden, ob eine Krone aus massivem Gold war, ohne diese zu zerstören. Die Lösung dieses Problems setzt das Konzept des spezifischen Gewichtes voraus. Für Archimedes hat sich nicht nur die Entwicklung dieses Konzeptes bewußt vollzogen, er war sich der Bedeutung seiner Erkenntnis sofort voll bewußt. Allerdings war Archimedes auch unter beträchtlichem Druck, denn der Tyrann von Syracus hatte ihm nach der Legende mit der Hinrichtung gedroht, wenn es ihm nicht gelänge, das Problem in kurzer Zeit zu lösen. Ungeklärt bleibt, ob Archimedes die Idee des spezifischen Gewichtes auch ohne diesen großen äußeren Druck entwickelt hätte. Möglicherweise hätte er am Schreibtisch die Idee entwickelt, ohne sich zunächst der besonderen Bedeutung bewußt zu sein, weil ihm die Idee des spezifischen Gewichtes als die logische Folge seiner bisherigen Überlegungen erschien. Erst die Wissenschaftshistoriker hätten den "Context of discovery" mühsam rekonstruieren müssen.

Sieglers Annahmen über den Strategieerwerb weichen deutlich von der Heureka-Legende ab: "Ein besserer Ansatz ist vielmehr die Annahme, daß die Entdeckung einer Strategie lediglich der erste Schritt für deren Verständnis ist. Nur wenn neue Konzepte und Strategien angewendet werden und die Konsequenzen der Anwendung beobachtet werden können, kann ein tiefes Verständnis für ihre Vor- und Nachteile unter verschiedenen Anwendungsbedingungen erlangt werden" (Siegler, 1989, S. 112, Übersetzung der Autorin).

Die Entdeckung einer neuen Strategie vollzieht sich bei den von Siegler beschriebenen Kindern bewußt, aber die neue Erkenntnis fällt ihnen keineswegs "wie Schuppen" von den Augen. Die Strategie wird entdeckt, ohne daß ihre Reichweite und ihre Bedeutung für das Lösen von Aufgaben erkannt wird. Dies wird unter dem Begriff beiläufiges Lernen subsumiert. Kaum jemand wird sich daran erinnern, wann er verstanden hat, daß man beim Vergleich zweier Mengen nur die Anzahl der Gegenstände und nicht deren räumliche Ausdehnung heranzieht. Bedenkt man, daß sich so entscheidende Entwicklungsschritte wie das Beherrschen des Zahlinvarianzprinzips "ganz nebenbei" vollzogen haben, erscheint es plausibel, daß auch bei der Strategieentdeckung das Heureka-Erlebnis eher die Ausnahme als die Regel ist.

Ob die Entdeckung einer neuen Strategie eher "nebenbei" abläuft oder ein Heureka-Erlebnis ist, hat möglicherweise weniger mit dem Erkenntnisinhalt zu tun als mit dem Situationskontext: Wenn unter besonderem Leistungsdruck händeringend nach einer effizienteren Strategie gesucht wird, wird deren Entdeckung mit der in der Heureka-Legende beschriebenen emotionalen Erleichterung einhergehen. Ohne diesen Leistungsdruck wird die einmal entdeckte Strategie erst durch ihre häufige Anwendung in vollem Ausmaß der bewußten Bewertung zugänglich gemacht.

3.1.2 Macht Not immer erfinderisch?

Plausibel ist die Annahme, daß eine neue Strategie dann entwickelt wird, wenn eine alte nicht zu dem gewünschten Ergebnis führt. So ist zu erwarten, daß die Entdeckung der Min-Strategie gefördert werden kann durch die Vorgabe von Aufgaben, die die Anwendung der Strategie herausfordern, z.B. 2+23=?. Diese plausible Annahme konnte bei Siegler nicht bestätigt werden: In keinem einzigen Falle konnte er nachweisen, daß die Entdeckung der Min-Strategie durch die gezielte Vorgabe von Aufgaben gefördert wurde. Mit einer Ausnahme wurde die Min-Strategie immer entdeckt, wenn eine Aufgabe mit kleinen Zahlen zu lösen war (Siegler, 1989, S. 105, Fußnote). War die Min-Strategie hingegen erst einmal entdeckt, konnte ihre Anwendungshäufigkeit deutlich gesteigert werden durch die Vorgabe von Aufgaben, die mit Hilfe der Min-Strategie sehr viel leichter gelöst werden können, z.B. 2+23=?.

Not macht demnach nicht erfinderisch, sondern anwendungsfreudig. Da die alte, umständlichere Strategie vertrauter ist, wird sie mit höherer Wahrscheinlichkeit aktiviert. Die neue Strategie hat nur eine Chance, aktiviert zu werden, wenn die alte Strategie nicht zu dem gewünschten Ergebnis führt.

3.1.3 Zur Rolle des Wissens beim Strategieerwerb

Siegler führt aus, daß der Erwerb einer neuen effizienteren Strategie ein unauffälliger Prozeß sein kann, der zwar nicht völlig unbewußt, aber doch eher "nebenbei" abläuft.

Entscheidend für die Entdeckung einer neuen Strategie ist, daß das Wissen, auf dem die Strategie basiert, bereits repräsentiert ist. So konnte Siegler (1989) zeigen, daß die Min-Strategie nur entdeckt werden kann, wenn die Kinder verstanden haben, daß man einen Summanden quantitativ repräsentieren kann durch das Wiederholen der Zahl. Der Entdeckung der Min-Strategie ging bei allen Kindern eine Modifikation in der Summenstrategie voran: Der erste Summand wurde nicht mehr mit den Fingern aufgezählt, sondern es wurde sofort die richtige Anzahl der Finger gehoben.

Effektivere Strategien werden nur erworben, wenn konzeptuelles Wissen repräsentiert ist, aus dem die Strategie abgeleitet werden kann. Eine Strategie entdecken heißt, bestehendes Wissen in neuen Zusammenhängen anzuwenden. Dies setzt Modifikationen in der mentalen Repräsentationsstruktur voraus: Die Assoziationsstärke zwischen dem konzeptuellen Wissen und dem zu lösenden Problem muß ansteigen, damit eine gemeinsame Aktivierung und damit die Entdeckung der Strategie ermöglicht wird.

3.2 Die Entdeckung der Abkürzungsstrategie

In der Arithmetik läßt sich besser als in den meisten anderen Gebieten zwischen Faktenwissen, konzeptuellem Wissen und Prozedurenwissen unterscheiden (siehe Hiebert & LeFevre, 1986). Die Kenntnis des kleinen Einmaleins gehört zu dem Faktenwissen, das Beherrschen der Summenstrategie bei der Addition zum Prozedurenwissen und das Verstehen des Kommutativgesetzes zum konzeptuellen Wissen. Die drei Formen des Wissens sind bis zu einem gewissen Grade kompensierbar. Mangelndes mathematisches Verständnis kann durch ein hohes Maß an Fakten- und Prozedurenwissen ausgeglichen werden und umgekehrt. Bei richtiger Lösung einer Aufgabe kann es große interindividuelle Unterschiede in dem zur Lösung herangezogenen Wissen geben. Ob eine Aufgabe strategisch geschickt gelöst wurde, kann deshalb meist eher der Bearbeitungszeit als der richtigen Lösung entnommen werden. Wird z.B. die Aufgabe 12+5-5= präsentiert, wird ein Teil der Kinder die Rechenoperationen nacheinander ausführen, während ein anderer Teil der Kinder erfaßt, daß bei dieser Aufgabe eine

Rechnung überflüssig ist. Um letzteres zu erkennen, muß konzeptuelles arithmetisches Verständnis aktiviert werden, z.B. Wissen darüber, daß man die arithmetischen Operationen nicht in der angegebenen Reihenfolge durchführen muß.

Die Lösung einer Aufgabe vom Typ a+b-b= ohne die Anwendung von Rechenoperationen wird im weiteren als "Abkürzungsstrategie" bezeichnet.

Bisanz und LeFevre (1990) sowie Bisanz, LeFevre und Gilliland (1989) haben die Anwendung von Abkürzungsstrategien bei 6-, 7-, 9-, 11- und 20jährigen untersucht. Sie erfaßten die Bearbeitungszeiten für Inversionsaufgaben vom Typ a+b-b= und konventionelle Aufgaben vom Typ a+b-c=. Die Größe der zu verrechnenden Zahlen wurde variiert. Die Größe der Zahlen beeinflußt die Bearbeitungszeit beim Aufgabentyp a+b-b=, wenn gerechnet wird, nicht aber wenn die Abkürzungsstrategie angewendet wird. Unterschieden sich die Bearbeitungszeiten für Aufgaben mit großen und kleinen Zahlen beim Aufgabentyp a+b-c=, nicht aber beim Aufgabentyp a+b-b=, wurde auf die Anwendung der Abkürzungsstrategie geschlossen.

Die Autoren konnten zeigen, daß der Anteil der Anwender bei den 6-, 7- und 9jährigen fast gleich war (25 - 29%), obwohl die 9jährigen erheblich schneller die Aufgaben a+b-c= ausrechneten als die 6- und 7jährigen. Erst bei den 11jährigen setzte sich die Abkürzungsstrategie weitgehend durch. Die Autoren kommen zu dem Schluß, daß zwischen 6 und 9 Jahren das prozedurale arithmetische Wissen deutliche Fortschritte macht, nicht aber die Anwendung konzeptuellen Wissens. Letzteres scheint vom Schulunterricht kaum beeinflußt zu werden, da genausoviele 6jährige wie 9jährige ihr Wissen anwenden.

4 Empirischer Teil: Studien zur Entdeckung der Abkürzungsstrategie

Die Abkürzungsstrategie entdecken bedeutet, konzeptuelles arithmetisches Wissen anwenden, deshalb eignet sich die Vorgabe von Inversionsaufgaben sehr gut für Studien zur spontanen Strategieentdeckung. Die Abkürzungsstrategie ist eine hilfreiche, aber keine "lebensnotwendige" Strategie und damit der Min-Strategie vergleichbar. In den folgenden Studien soll untersucht werden, inwieweit sich Sieglers Annahmen zur Strategieentdeckung, die sich im wesentlichen auf die Beobachtung von Vorschulkindern beim Entdecken der Min-Strategie stützen, generalisieren lassen auf die Entdekkung der Abkürzungsstrategie durch Grundschulkinder. In der ersten Studie werden charakteristische Bedingungen der Strategieentdeckung untersucht. Im Mittelpunkt der zweiten und dritten Untersuchung steht die Bedeutung des konzeptuellen Vorwissens für die Strategieentdeckung sowie die Frage, unter welchen Bedingungen eine einmal entdeckte Strategie auf einen neuen Aufgabentyp transferiert wird.

In allen drei Studien werden Kinder unterschiedlicher Klassenstufen einbezogen, um den Einfluß des mathematischen Vorwissens zu erfassen. Der prozentuale Anteil der Strategieentdecker und -anwender wird für jede Klassenstufe ermittelt. Es wurde im Einzelversuch getestet, deshalb ist die Anzahl der Versuchspersonen gering, die in jeder Klassenstufe ermittelten Prozentwerte sind mit einem großen Stichprobenfehler behaftet. Da es nicht Ziel der Untersuchung ist, Aussagen über die Häufigkeit der Strategieanwendung in unterschiedlichen Klassenstufen zu machen, sondern Bedingungen der Strategieentdeckung unter Einfluß von bestehendem Vorwissen zu analysierern, wird keine signifikanzstatistische Auswertung der Prozentwerte vorgenommen.

4.1 Untersuchung I: Merkmale der spontanen Strategieentdeckung

In dieser Studie wird der Prozeß der Strategieentdeckung anhand des Verlaufes der Bearbeitungszeiten in zwei Altersgruppen analysiert und beschrieben. Folgenden Fragen wird nachgegangen: 1. Läßt sich der Zeitpunkt der Strategieentdeckung identifizieren? 2. Wird die Abkürzungsstrategie nach ihrer Entdeckung durchgehend angewendet? 3. Unterscheiden sich Strategieentdecker von Nicht-Entdeckern in der Rechenfertigkeit?

4.1.1 Methode

Die Bearbeitungszeiten für die Aufgabentypen "a+b-b" sowie "a+b-c" werden verglichen. Es werden 13 Aufgaben vom jedem Typ zusammen mit 22 Füllaufgaben vorgegeben, in denen zwei Zahlen addiert oder subtrahiert werden müssen.

Versuchspersonen: 32 Kinder (19 männlich, 13 weiblich) aus Münchener Kinderhorten nahmen an der Untersuchung teil. 17 Kinder waren in der zweiten, 15 in der dritten Klasse. Die Kinder wurden im Einzelversuch getestet.

Da die Bearbeitungszeit erfaßt werden sollte, wurde eine PC-gesteuerte Versuchsanordnung gewählt: Die Aufgaben wurden auf dem Bildschirm eines Computers (Compaq Portable III) für maximal 12 Sekunden dargeboten. Das richtige Ergebnis wurde bei der Hälfte der Aufgaben in der linken, bei der anderen Hälfte in der rechten unteren Ecke dargeboten (s. Abb. 1). In der gegenüberliegenden Ecke wurde ein falsches Ergebnis dargeboten. Durch einen Tastendruck gaben die Vpn an, auf welcher Seite sich nach ihrer Meinung das richtige Ergebnis befand. Nach dem Tastendruck verschwand die Aufgabe und nach einer Pause von 3 Sekunden wurde die nächste Aufgabe dargeboten. Nach jeweils 10 Aufgaben wurde eine Pause von 10 Sekunden eingelegt. Die Bearbeitungszeit für jede Aufgabe wurde mit einer Genauigkeit von 50 Millisekunden gemessen.

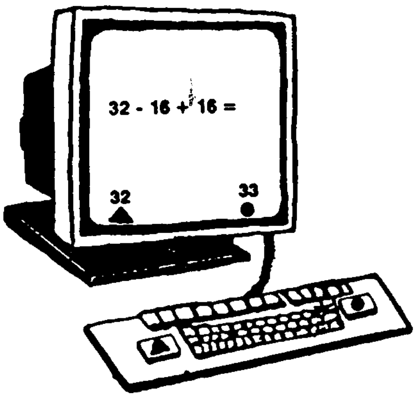


Abb. 1: Aufgabendarbietung

Nach Abschluß des Computerversuchs wurden zwei Aufgaben schriftlich vorgegeben, die von Zweit- und Drittkläßlern nur bei Anwendung der Abkürzungsstrategie in kurzer Zeit gelöst werden können: 135+87-87= und 189+63-63=. Es sollte überprüft weren, ob die im Computerversuch entdeckte Abkürzungsstrategie auch in einem neuen Kontext angewendet werden kann. Wurde eine Aufgabe nicht innerhalb von fünf Sekunden gelöst, wurde zur Frustrationsvermeidung eine leichtere Aufgabe gestellt.

4.1.2 Ergebnisse

Kriterien für die Strategieentdeckung

In Abbildung 2 sind drei typische individuelle Bearbeitungszeitverläufe für den Aufgabentyp a+b-b= dargestellt, die Rückschlüsse auf die Strategieentdeckung zulassen. Aus den Verlaufsformen werden folgende Schlüsse auf die Art der Strategieentdekkung und -anwendung gezogen:

Abb. 2a: Bei einer bestimmten Inversionsaufgabe nimmt die Bearbeitungszeit deutlich zu, bei der folgenden Inversionsaufgabe nimmt die Bearbeitungszeit rapide ab und bleibt auf dem niedrigen Niveau. Aus dem Bearbeitungszeitverlauf kann man schließen, daß die Abkürzungsstrategie bei der Aufgabe mit der verlängerten Bearbeitungszeit entdeckt wurde und ab diesem Zeitpunkt angewendet wurde.

Abb. 2b: In dieser Verlaufsform ist der für die Strategieentdeckung typische Anstieg der Bearbeitungszeit und die anschließende Reduktion zu beobachten, allerdings war zwischendurch bei ein oder zwei Aufgaben ein deutlicher Anstieg der Bearbeitungszeit zu verzeichnen. Hier wurde offensichtlich nicht die Abkürzungsstrategie angewendet, sondern gerechnet. Dieser Verlauf spricht dafür, daß die Abkürzungsstrategie entdeckt aber anschließend nicht durchgehend angewendet wurde.

Abb. 2c: Die Bearbeitungszeit bleibt weitgehend konstant über die Versuchsdurchgänge. Die Aufgaben wurden ausgerechnet.

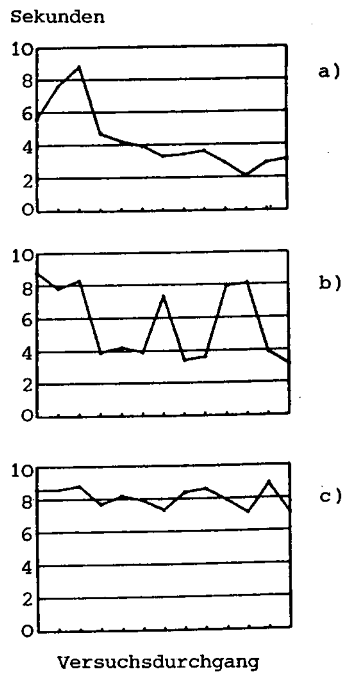


Abb. 2: Drei exemplarische Verläufe der Bearbeitungszeiten für den Aufgabentyp a+b-b=

Die Kinder lassen sich nach ihren Bearbeitungszeitverläufen in drei Gruppen aufteilen: a) Die Entdecker und durchgehenden Anwender nach Abb. 2a, b) die Entdecker und zeitweiligen Anwender nach Abb. 2b, und c) die Nicht-Entdecker nach Abb. 2c. Die Zuordnung der Bearbeitungszeitverläufe zu einem dieser drei Muster machte keine Probleme. Der für die Strategieentdeckung charakteristische Abfall der Bearbeitungszeit fand entweder bei den ersten vier Aufgaben statt oder gar nicht. Kinder, die mindestens einmal einen "Rückfall" erlitten, wurden Gruppe 2 zugeordnet.

Alle Kinder, deren Bearbeitungszeiten über die Zeit konstant blieb, benötigten 6-8 Sekunden zur Bearbeitung der Aufgaben, was für die Anwendung von Rechenstrategien spricht.

Strategieentdeckung und Lebensalter

Tabelle 1 ist die prozentuale Häufigkeit der Verläufe für beide Altersgruppen zu entnehmen. Der Anteil der Entdecker unterscheidet sich bei Zweit- und Drittkläßlern nicht, aber deutlich mehr Drittkläßler als Zweitkläßler haben die Abkürzungsstrategie nach der Entdeckung durchgehend angewendet. Das in Abbildung 2b dargestellte Verlaufsmuster konnte nur bei Zweitkläßlern beobachtet werden, d.h. nur jüngere Kinder haben die Abkürzungsstrategie nicht durchgängig angewendet, nachdem sie sie einmal entdeckt hatten.

Tab. 1: Anzahl und Prozentsatz (in Klammern) der Strategieentdecker und Anwender (Verlauf wie in Abb. 2a), der Entdecker und zeitweiligen Anwender (Verlauf wie in Abb. 2b) und der Nicht-Entdecker (Verlauf wie in Abb. 2c) pro Klassenstufe.

	Strategie entdeckt und angewendet	Strategie entdeckt und teilweise angewendet	Strategie nicht entdeckt
Klassenstufe			
2 (n=17)	2 (12%)	6 (35%)	9 (53%)
3 (n=15)	8 (53%)	0 (00%)	7 (47%)

Es zeigte sich, daß alle Kinder, bei denen sich ein Verlauf nach dem Muster in Abbildung 2a oder 2b zeigte, bei den in der Nachbefragung präsentierten Aufgaben mit Hilfe der Abkürzungsstrategie das Ergebnis fanden, hingegen kein Kind mit Muster 2c. Dieser eindeutige Befund rechtfertigt im Nachhinein auch die

Interpretation der Bearbeitungszeitverläufe und die Klassifikation der Versuchspersonen in Entdecker und Nicht-Entdecker.

Der Zusammenhang zwischen Strategieentdeckung und Rechenfertigkeit

Sind die Strategieentdecker die besseren Rechner oder sind die Anwendung konzeptuellen Wissens und die Rechenfertigkeit unabhängig voneinander? Die Rechenfertigkeit wurde erfaßt, indem die durchschnittliche Rechengeschwindigkeit bei den richtig gelösten konventionellen Aufgaben ermittelt wurde. Als Strategieentdecker wurden die Kinder bezeichnet, deren Bearbeitungszeitverlauf dem der Abbildungen 2a oder 2b entspricht, als Nicht-Entdecker wurden Kinder bezeichnet, deren Bearbeitungszeitverlauf dem der Abbildung 2c entspricht.

Die Korrelation zwischen der dichotomisierten Variable "Strategieentdeckung" und der Rechenfertigkeit beträgt für die Kinder der zweiten Klasse -.57, und für die Kinder der dritten Klasse -.54. Beide Koeffizienten sind signifikant ($p < .05$). Die Strategieentdecker sind offensichtlich die besseren Rechner.

4.1.3 Diskussion

Die älteren Kinder repräsentieren offensichtlich die einmal entdeckte Strategie so im Gedächtnis, daß sie jederzeit bei Bedarf verfügbar ist, während die jüngeren Kinder mit der Aktivierung der Strategie Schwierigkeiten haben. Dazu Siegler: "Die Anwendung von Strategien ist möglicherweise ein besonders kritischer Punkt. Kinder sind im allgemeinen weniger als Erwachsene dazu in der Lage, die Eigenschaften einer angewendeteten Strategie zu erfassen. Das veranlaßt sie dazu, eine einmal entdeckte Idee immer wieder zu entdecken, bevor sie endgültig verstanden wird" (1989, S. 112, Übersetzung der Autorin).

Der recht hohe Zusammenhang zwischen der Strategieentdeckung und der Rechenfertigkeit kann unter Bezugnahme auf zwei psychologische Konstrukte, nämlich die begrenzte Arbeitsspeicherkapazität und die Automatisierung von Prozeduren erklärt werden. Die Menge der Arbeitsspeicherkapazität, die für die Aktivierung einer Wisseneinheit benötigt wird, hängt von der Repräsentation einer Wisseneinheit im Langzeitspeicher ab. Das gilt für die Aktivierung von Faktenwissen (siehe Chase & Ericsson, 1982) und für Prozeduren (Schneider & Shiffrin, 1977). Eine bereits weitgehend automatisierte Prozedur benötigt weniger Arbeitsspeicher, es bleiben freie Kapazitäten für die Aktivierung von weiterem Wissen, z.B. von konzeptuellem mathematischen Wissen, aus dem eine neue Strategie abgeleitet werden kann. Kinder, die noch keine effektiven automatisierten Additions- und Subtraktionsstrategien gespeichert haben, benötigen ihre gesamte Arbeitsspeicherkapazität für das Ausrechnen der

Aufgabe. Das zur Entdeckung der Abkürzungsstrategie benötigte Wissen kann nicht aktiviert werden, weil es an freier Arbeitsspeicherkapazität fehlt.

4.2 Untersuchung II: Die Generalisierung der Strategie

In Untersuchung II soll erfaßt werden, ob Grundschulkinder die Abkürzungsstrategie generalisieren können, d.h. ob sie den Geltungsbereich der Strategie bereits so allgemein fassen, daß sie diese auf andere Aufgaben anwenden können. Zusätzlich zum Aufgabentyp a+b-b= wurden Aufgaben hinzugenommen, die ebenfalls mit der Abkürzungsstrategie zu lösen sind: a-b+b= und a+b-a=.

4.2.1 Methode

In Anlehnung an die Versuchsanordnung von Bisanz und LeFevre (1989, 1990) wurde die Anwendung der Abkürzungsstrategie geprüft, indem die Größe der in den Aufgaben verwendeten Zahlen variiert wurde. Wird nicht gerechnet, sondern Abkürzungsstrategie angewendet, hat die Größe der zu verrechnenden Zahlen nur einen minimalen Einfluß auf die Lösungsgeschwindigkeit der Aufgabe. Muß hingegen gerechnet werden, benötigen Aufgaben mit großen Zahlen mehr Zeit als Aufgaben mit kleinen Zahlen.

Es wurde die gleiche PC-gesteuerte Versuchsanordnung wie in Untersuchung I eingesetzt. Neben den Inversionsaufgabentypen a+b-b=, a-b+b= und a+b-a= wurden konventionelle Aufgaben vorgegeben: a+b-c=, a-b+c=, b-a+b=, b+a+b= und a-b-b=. Bei den konventionellen Aufgaben war die falsche Antwortalternative stets a. Von jedem Aufgabentyp wurden zwölf Aufgaben dargeboten, sechs Aufgaben mit Zahlen von 1 - 20 und sechs Aufgaben mit Zahlen von 30 - 50.

Versuchspersonen: 42 Kinder (19 weiblich, 23 männlich) aus Münchener Kinderhorten wurden im Einzelversuch getestet. 15 Kinder waren in der zweiten, 15 in der dritten und 12 in der vierten Klasse.

4.2.2 Ergebnisse

Kriterium für die Strategieanwendung

Ob eine Person bei den Inversionsaufgaben die Abkürzungsstrategie anwendet, wurde wie folgt festgelegt: Es wurde für jeden Aufgabentyp die mittlere Bearbeitungszeit für die Aufgaben mit kleinen Zahlen berechnet. Dieser Wert wurde mit der Bearbeitungszeit jeder einzelnen Aufgabe mit großen Zahlen verglichen. Zeigte sich bei der Bearbeitungszeit von vier der sechs Aufgaben mit großen Zahlen nur eine geringe Abweichung (eine Sekunde und weniger) zur mittleren Bearbeitungszeit bei den Aufgaben mit kleinen Zahlen, wurde das Kind zum Strategieentdecker erklärt. Mit dieser Festlegung sollte dem in Untersuchung I gefundenen Ergebnis Rechnung getragen werden, daß die entdeckte Abkürzungsstrategie insbesondere bei Zweitkläßlern nicht immer angewendet wurde.

Prozentsatz der Strategieentdecker

Die Anzahl und der Prozentsatz der Kinder in jeder Klassenstufe, die die Abkürzungsstrategie nach dem o.g. Kriterium anwenden, sind Tabelle 2 zu entnehmen.

Tab. 2: Anzahl und Prozentsatz (in Klammern) der Strategieanwender.

	Aufgabentyp		
	a+b-b=	a-b+b=	a+b-a=
Klassenstufe			
2 (n=15)	5 (32%)	3 (20%)	3 (20%)
3 (n=15)	7 (46%)	5 (33%)	5 (33%)
4 (n=12)	9 (75%)	4 (33%)	3 (25%)

Der Anteil der Entdecker beim Aufgabentyp a+b-b= ist niedriger als in der in Untersuchung I gefundene. Dies ist plausibel, da in Untersuchung II eine zunächst verwirrende Vielfalt von äußerlich ähnlichen Aufgaben präsentiert wurde.

Es zeigt sich, daß - insbesondere bei den Zweitkläßlern - weniger Kinder die Abkürzungsstrategie bei den Aufgabentypen a-b+b= und a+b-a= anwenden als bei a+b-b=.

4.2.3 Diskussion

Die Ergebnisse zeigen, daß die Mehrheit der Kinder aller Altergruppen die Abkürzungsstrategie noch nicht so allgemein gefaßt haben, daß sie wie folgt verallgemeinern könnten: "Wird die gleiche Zahl addiert und subtrahiert, egal in welcher Reihenfolge, hat dies keinen Einfluß auf das Gesamtergebnis." Die Strategie wird noch enger gefaßt, sie könnte lauten: "Wird zuerst eine Zahl addiert und dann gleich wieder subtrahiert, hat dies keinen Einfluß auf das Gesamtergebnis". Diese eingeschränkte Fassung der Abkürzungsstrategie spricht für einen Mangel an konzeptuellem mathematischen Wissen: Es wird nicht berücksichtigt, daß die Reihenfolge, in der subtrahiert oder addiert wird, ohne Einfluß auf das Ergebnis bleibt. Würden die Kinder ihre intuitive Mathematik aktivieren, nach der die Addition "etwas hinzutun" und die Subtraktion "etwas wegnehmen" bedeutet, sollte die Entdeckung der Abkürzungsstrategie auch für die Aufgaben a-b+b= und a+b-a= keine Schwierigkeiten bereiten. In einer weiteren Untersuchung soll überprüft werden, ob der vom Versuchsleiter gegebene Hinweis auf die intuitive Mathematik die Generalisierung der Strategie fördert.

4.3 Untersuchung III: Die Vermittlung einer Strategie

Die Kinder wurden instruiert, die dargebotenen Aufgaben nicht auszurechnen, sondern lediglich zu entscheiden, ob man durch Rechnen zur Lösung kommt oder ob man die Abkürzungsstrategie anwenden kann. Zuvor wurde die Abkürzungsstrategie erläutert.

4.3.1 Methode

Den Kindern wurde gesagt, daß man bei einigen Aufgaben nicht rechnen muß, weil die gleiche Menge dazuaddiert wie abgezogen wird. Um an die intuitive Mathematik anzuknüpfen, wurde dies mit farbigen Klötzchen veranschaulicht. Zusätzlich wurde das Inversionsprinzip am Beispiel des Aufgabentyps b-b+a= erläutert.

60 Aufgaben wurden schriftlich präsentiert. Es gab vier Typen von Inversionsaufgaben: b-b+a, a+b-b, a-b+b, a+b-a und sechs konventionelle Aufgabentypen: a+b+b, a+a-b, a-b-b, a-b+a, a+b-c, a-b+c. Von jedem Aufgabentyp wurden 6 Aufgaben vorgegeben.

Die Kinder wurden instruiert, nicht die Aufgaben auszurechnen, sondern lediglich anzugeben, ob man eine Aufgabe lösen muß, indem man die Zahlen verrechnet, oder ob man die Rechnung abkürzen kann, weil die gleiche Menge dazukommt wie abgezogen wird.

Versuchspersonen: 51 Kinder (19 männlich, 32 weiblich) aus Münchener Kinderhorten nahmen an der Untersuchung teil. 24 Kinder waren in der zweiten, 16 in der dritten und 11 in der vierten Klasse.

4.3.2 Ergebnisse

In Tabelle 3 ist der prozentuale Anteil der Kinder angegeben, die bei mindestens fünf der sechs präsentierten Inversionsaufgaben eines Typs feststellten, daß man nicht rechnen muß.

Tab. 3: Anzahl und Prozentsatz (in Klammern) der Kinder, die die Abkürzungsstrategie anwenden würden.

	Aufgabentyp		
	a+b-b=	a-b+b=	a+b-a=
Klassenstufe			
2 (n=24)	12 (50%)	7 (29%)	4 (17%)
3 (n=16)	12 (66%)	8 (50%)	7 (44%)
4 (n=11)	8 (72%)	3 (28%)	6 (55%)

Tab. 4: Anzahl und Prozentsatz (in Klammern) der Kinder, die die Abkürzungsstrategie anwenden würden nach Entfernung der Übergeneralisierer.

	Aufgabentyp		
	a+b-b=	a-b+b=	a+b-a=
Klassenstufe			
2 (n=24)	4 (16%)	3 (12%)	0 (00%)
3 (n=16)	7 (43%)	4 (25%)	4 (25%)
4 (n=11)	8 (72%)	3 (28%)	6 (55%)

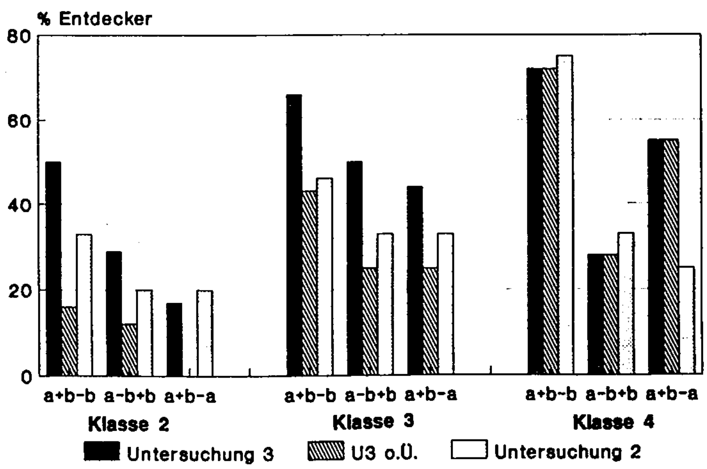
Verglichen mit den Ergebnissen in Untersuchung II (Tabelle 2) zeigt sich in Tabelle 3, daß in allen Altersgruppen und für alle Typen von Inversionsaufgaben gilt, daß es sehr viel einfacher ist, nach einem Hinweis die Abkürzungsstrategie zu erkennen, als diese spontan anzuwenden - so könnte man schließen. Eine Auswertung der Angaben bei den konventionellen Aufgaben spricht gegen diese Interpretation. Vierzehn Zweitkläßler (58 %), sieben Drittkläßler (44 %), und ein Viertkläßler (9 %) wollten mindestens einen konventionellen Aufgabentyp mit der Abkürzungsstrategie lösen. Ein großer Teil der Kinder nahm offensichtlich eine Übergeneralisierung der Strategie vor.

Tabelle 4 ist der prozentuale Anteil der Strategieanwender zu entnehmen, der nach der Entfernung der Übergeneralisierer bleibt.

4.3.3 Diskussion

Insbesondere in der zweiten Klasse wird vollständig übergeneralisiert: Die Kinder verstehen offensichtlich noch nicht, welche Merkmale die Aufgabe aufweisen muß, damit die Abkürzungsstrategie angewendet werden kann. Vielmehr legen sich die Kinder eine Regel zurecht, in der nur Oberflächenmerkmale berücksichtigt werden: "Wenn eine Aufgabe mit drei Zahlen zwei gleiche Zahlen enthält, ist die dritte Zahl das Ergebnis". Solche Übergeneralisierungen, die für geringes konzeptuelles Verständnis sprechen, kommen auch noch in der dritten, nicht aber in der vierten Klasse vor. Werden nur die Kinder einbezogen, die nicht übergeneralisiert haben, zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen von Untersuchung II und Untersuchung III, wie Abbildung 3 zu entnehmen ist.

Abb. 3: Der Prozentsatz der Strategieentdecker in Untersuchung 2 und Untersuchung 3 mit und ohne Übergeneralisierer im Vergleich.
U3 o.Ü. = Ergebnisse aus Untersuchung 3 ohne Übergeneralisierer



Bei Kindern der zweiten und dritten Klasse führte der Mangel an mathematischem Verständnis zur Entwicklung von Oberflächenstrategien. Die meisten Zweitkläßler sind mit der Anwendung der Abkürzungsstrategie bei den Aufgabentypen a-b+b= konzeptuell überfordert, wie eine Nachfrage bei einigen Kindern zeigte, die die Abkürzungsstrategie für den Aufgabentyp a+b-b= spontan erkannt hatten. Als Lösung für die Aufgabe 16-9+9= wurde sehr oft 2 angegeben und dies wurde wie folgt begründet: "9+9=18 und 18-16 ergibt 2".

Das Ergebnis zeigt erneut, daß konzeptuelles Wissen und die Entdeckung einer Strategie eng zusammenhängen. Fehlt die konzeptuelle Wissensbasis, kann die Entdeckung einer neuen Strategie nicht durch Hinweisreize ausgelöst werden. Ausgelöst werden kann lediglich eine Oberflächenstrategie.

5 Gesamtdiskussion

Die vorliegenden Ergebnisse lassen sich gut mit Sieglers Vorstellungen zum Strategieerwerb vereinbaren. Obwohl sich der genaue Zeitpunkt der Strategieentdeckung identifizieren läßt, ist diese offensichtlich ein für die Person unspektakulärer Vorgang. Entscheidend für die Strategieentdeckung ist, daß das zugrundeliegende Wissen verfügbar ist. Die Aufgabenschwierigkeit und die situationalen Anforderungen allein können den Aufbau effizienter Strategien nicht bewirken.

Als wichtigste Befunde der drei Untersuchungen lassen sich festhalten:

1. Für jüngere Kinder (Zweitkläßler) konnte in Untersuchung I gezeigt werden: Ist eine Strategie entdeckt, bedeutet dies nicht, daß sie sofort und immer angewendet wird, selbst wenn dies angemessen wäre. Die neue Strategie konkurriert mit bereits vorhandenen, möglicherweise weniger effizienten, aber dafür hoch vertrauten Strategien. Erst allmählich setzt sich die neue Strategie durch. Alle Drittkläßler hingegen wenden die Abkürzungsstrategie durchgehend an, nachdem sie entdeckt wurde. Ältere Kinder sind demnach eher als jüngere Kinder in der Lage, einmal entdeckte Strategien so zu repräsentieren, daß sie mit hoher Wahrscheinlichkeit wieder aktiviert werden können.

2. Weder bei Siegler noch in dieser Arbeit konnte gezeigt werden, daß die Entdeckung einer Strategie durch die Anforderungen der Aufgabenstellung ausgelöst werden kann. Obwohl es für die Kinder recht frustrierend war, daß die Aufgaben in Untersuchung I und Untersuchung II zum Teil vom Bildschirm verschwanden, bevor sie gelöst werden konnten, entdeckte ein recht großer Teil der Kinder die Abkürzungsstrategie überhaupt nicht.

3. Die Entdeckung einer neuen Strategie ist eng an das bereits repräsentierte Wissen geknüpft. Eine Strategie entdecken bedeutet im wesentlichen, bestehendes Wissen

auf neue Zusammenhänge anzuwenden. Die Ergebnisse in Untersuchung II legen nahe, daß eine spontane Generalisierung der Abkürzungsstrategie auf ähnliche Aufgaben nur vorgenommen wird, wenn konzeptuelles Verständnis vorliegt. Von sich aus entwickeln Kinder, wie das Ergebnis aus Untersuchung II zeigt, offensichtlich nur Strategien, wenn sich diese aus dem konzeptuellen Wissen ableiten lassen. Oberflächenstrategien werden demnach nur entwickelt, wenn die Kinder zu effektiverem Vorgehen angehalten werden, dessen konzeptuelle Grundlage sie noch nicht durchschauen. Das Ergebnis stimmt mit Sieglers Auffassung überein, wonach Kinder spontan keine unsinnigen und falschen Strategien entdecken. So kam es in Sieglers Studie niemals vor, daß ein Kind die Kardinalzahl des ersten Addenten mitzählte, also bei der Aufgabe 4+3 = 4,5,6 zählte und zu dem Ergebnis 6 kam.

4. Eine neue Strategie kann nur entdeckt werden, wenn das für ihre Entdeckung benötigte Wissen zum richtigen Zeitpunkt aktiviert wird. Ein Grund dafür, daß vorhandenes Wissen nicht zum angemessenen Zeitpunkt aktiviert wird und deshalb die Strategie nicht entdeckt werden kann, ist möglicherweise, daß bereits repräsentierte Strategien so arbeitsspeicherintensiv sind und deshalb die Aktivierung zusätzlichen Wissens nicht möglich ist. Ein Indiz hierfür ist der gefundene Zusammenhang zwischen Rechenfähigkeit und Strategieentdeckung in Untersuchung I. Kinder, die schnell rechnen können, sind eher in der Lage, Abkürzungsstrategien zu entdecken und anzuwenden. Löst die Darbietung einer Arithmetikaufgabe die Aktivierung recht arbeitsspeicherintensiver Rechenstrategien aus, bleibt keine freie Kapazität für die Aktivierung des für die Entdeckung der Abkürzungsstrategie benötigten Wissens.

5. Die Ergebnisse der Untersuchung III zeigen, daß die externe Vermittlung von Strategien nicht nur sinnlos, sondern auch problematisch ist, wenn das für die Entdeckung der Strategie benötigte Wissen noch nicht repräsentiert ist. Es werden Oberflächenstrategien entwickelt, die bei einem Teil der Aufgaben zum Erfolg führen und deren Fehlerhaftigkeit deshalb möglicherweise erst sehr spät entdeckt wird. Der Aufbau von Oberflächenstrategien im Mathematikunterricht ist ein oft beklagter Sachverhalt. Wohl am drastischsten hat Schoenfeld (1982) gezeigt, welche Auswirkungen die Vermittlung von Strategien haben kann: Textaufgaben können recht erfolgreich mit sogenannten Schlüsselwortstrategien gelöst werden. Es wird nach Wörtern in der Textaufgabe gesucht, die auf die angemessene Operation hinweisen, z.B. "übrig" oder "weniger" auf Subtraktion und "mehr" und "zusammen" auf Addition. Amerikanische Kinder, denen z.B. beigebracht wurde, daß bei der Aufgabe "Jack has 5 marbles. Then he gave 3 marbles to John. How many marbles does Jack have left?" das Wort "left" darauf hinweist, daß subtrahiert werden muß, subtrahierten auch, wenn ein "Mr. Left" in der Aufgabe vorkam.

Es ergeben sich vier Schlußfolgerungen für die erfolgreiche Strategievermittlung:

1. Hat ein Lehrer eine Heureka-Vorstellung vom Strategieerwerb, wird er frustriert sein, wenn ein Kind die kurz zuvor noch angewendete effiziente Strategie wieder durch die umständlichere ersetzt hat. Er wird zu der Annahme gelangen, daß das Kind das der Strategie zugrundeliegende Prinzip entgegen seiner Annahme doch noch nicht verstanden hat und an der Intelligenz des Kindes, an seiner pädagogischen Fähigkeit oder an beidem zweifeln. Der Lehrer könnte gelassener reagieren, wenn er die polarisierte Vorstellung vom Verstehensprozeß, in der es nur "verstanden haben" und "nicht verstanden haben" gibt, durch Sieglers Strategiemodell ersetzt, in dem mehrere - geschickte und weniger geschickte - Strategien nebeneinander existieren können und erst mit zunehmender Vertrautheit die effektivste Strategie die höchste Aktivierungswahrscheinlichkeit erhält. Jeder Lehrer sollte wissen, daß eine einmal entdeckte und verstandene Strategie wieder in Vergessenheit geraten kann, weil sie mit anderen, zwar ineffektiveren, aber dafür hochvertrauten Strategien konkurrieren muß.

2. Die Vermittlung einer Strategie bei fehlendem konzeptuellen Wissen kann beim Schüler die Entwicklung einer Oberflächenstrategie zur Folge haben, die teilweise zum Erfolg führt und damit das Beheben des konzeptuellen Defizits verhindert. Bevor eine Strategie vermittelt wird, sollte überprüft werden, ob das nötige Verständnis bereits vorliegt. Dies setzt jedoch eine sorgfältige Analyse des der Strategie zugrundeliegenden konzeptuellen Wissens voraus.

3. Sollen die Kinder dazu veranlaßt werden, ihre bisherige Strategie durch eine effektivere zu ersetzen, also z.B. die Aufgabe 32+12= nicht lösen, indem sie 12 auf 32 aufzählen, sondern indem sie die Aufgabe zerlegen in 32+10+2=, muß berücksichtigt werden, daß die effektivere Strategie zu Beginn mehr Zeit und Arbeitsspeicherkapazität benötigt und zudem fehleranfälliger ist als die umständliche, aber vertraute Strategie. Die Vorteile der neuen Strategie stellen sich erst mit zunehmender Übung ein. Aus lernpsychologischer Sicht ist es deshalb nur verständlich, daß Kinder sich nicht gern von ihren alten Strategien trennen. Sollen Kinder also eine alte Strategie durch eine neue ersetzen, muß der Lehrer die enstehende Frustration kompensieren, z.B. durch besonderes Lob. Die Aktivierungswahrscheinlichkeit einer neuen Strategie muß erhöht werden.

4. Die Vorstellung, daß Not erfinderisch macht, kann bei Schüler und Lehrer Frustration hervorrufen, wenn ständig Aufgaben vorgegeben werden, die die Kinder überfordern. Die Lehrer sind frustriert, weil ein Teil der Kinder trotzdem die effektivere Strategie nicht anwendet, und die Kinder werden durch die schweren Aufgaben entmutigt.

Strategievermittlung kann nur erfolgreich sein, wenn folgende Schritte nacheinander absolviert werden:

1. Die konzeptuelle Voraussetzungen für die Strategieentdeckung durch die Vermittlung des zugrundeliegenden Wissens schaffen.

2. Hinweisreize geben, damit das für die Strategieentdeckung benötigte Wissen zu gegebener Zeit aktiviert wird.

3. Ist eine effiziente Strategie entdeckt, muß dafür gesorgt werden, daß sie auch angewendet wird. Dies kann geschehen, indem Aufgaben vorgegeben werden, deren Lösung mit Hilfe der neuen Strategie entscheidend erleichtert wird.

Perspektiven für die Strategieforschung

Strategisches Wissen ist eingebettet in die mentale Repräsentation von konzeptuellem, Fakten- und Prozedurenwissen. Dies muß in Untersuchungen zur Entdeckung und Anwendung von Strategien stärker als bisher berücksichtigt werden. Welches Wissen muß repräsentiert sein, damit eine Strategie entdeckt werden kann, und wie muß das Wissen repräsentiert sein, damit es zum gegebenen Zeitpunkt aktiviert werden kann? Diese Fragen sollten in jeder Arbeit zum Strategieerwerb gestellt werden.

Sieglers "mikrogenetischer" Ansatz in der Strategieforschung, nämlich die intensive Langzeitbeobachtung einzelner Personen beim Problemlösen, ist eine geeignete Methode, aus der Alltagspsychologie entnommene Vorurteile über den Wissenserwerb aufzugeben. Weitere "mikrogenetische" Untersuchungen an andern Inhalten und Personengruppen sind nötig, um bereichs- und personenspezifische Charakteristika des Strategieerwerbs bei der Entwicklung von Theorien besser berücksichtigen zu können.

Literatur

Bisanz, J. & LeFevre, J. (1990). Strategic and nonstrategic processing in the development of mathematical cognition. In D.F. Bjorklund (Ed.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development* (pp. 213-244). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bisanz, J., LeFevre, J. & Gilliland, S. (1989, April). *Developmental changes in the use of logical principles in mental arithmetic.* Poster presented at the biennial meeting of the Society for Research in Child Development, Kansas City, KS.

Chase, W.G. & Ericsson, K.A. (1982). Skill and working memory. In G.H. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation* (Vol. 16, pp. 1-58). New York: Academic Press.

Hiebert, J. & LeFevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introduction analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Pressley, M., Forrest-Pressley, D.L., Elliott-Faust, D. & Miller, G. (1985). Children's use of cognitive strategies, how to teach strategies, and what to do if they can't be taught. In M. Pressley, & C.J. Brainerd (Eds.), *Cognitive learning and memory in children* (pp. 1-47). New York: Springer.

Schneider, W. & Shiffrin, R.M. (1977). Controlled and automatic human information processing: I. Detection, search, and attention. *Psychological Review*, *84*, 1-66.

Schoenfeld, A.H. (1982). Some thoughts on problem-solving research and mathematics education. In F.K. Lester & J. Garofaldo (Eds.), *Mathematical problem solving: Issues and research* (pp. 27-37). Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Siegler, R.S. (1986). Unities across domains in children's strategy choices. In M. Perlmutter (Ed.), *Minnesota Symposium on Child Development* (Vol. 19, pp. 1-48). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Siegler, R.S. (1987). Strategy choices in subtraction. In J.A. Sloboda & D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics* (pp. 81-106). Oxford: Oxford University Press.

Siegler, R.S. (1988). Strategy choice procedures and the development of multiplication skill. *Journal of Experimental Psychology: General*, *117*, 258-275.

Siegler, R.S. (1989). Summary, conclusions, and ideas. In R.S. Siegler & E.A. Jenkins (Eds.), *How children discover new strategies* (pp. 98-124). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Siegler, R.S. & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills* (pp. 229-293). Hillsdale, NJ: Erlbaum.