# Kognitive Entwicklungspsychologie des mathematischen Denkens

Elsbeth Stern

Sonderdruck aus:

M. van Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.) (2005),
*Rechenstörungen bei Kindern: Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (S. 137–149).
Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Elsbeth Stern

# Kognitive Entwicklungspsychologie des mathematischen Denkens

## Intuitive und kulturelle Mathematik

Zu den spektakulären Ergebnissen der Entwicklungspsychologie gehören die Befunde zum kompetenten Säugling. Während Piaget noch davon ausging, dass angeborene lebensnotwendige Reflexe die Grundlage für geistige Entwicklung darstellen, wissen wir heute, dass die universell verfügbare genetische Ausstattung des Menschen komplexer ist (Sodian 1995; Stern 2002, 2003). Menschen werden mit einem modularisierten Gehirn auf die vielfältigen Anforderungen ihrer Umgebung vorbereitet und können deshalb Lernangebote aus der Umgebung schnell und ohne Umwege nutzen. Da das menschliche Gehirn auf die Grundstruktur der Sprache vorbereitet ist, können Kinder auch ohne systematische Instruktion die in ihrer Umgebung gebräuchliche Sprache erwerben. Auch Wissen über grundlegende physikalische und mathematische Gesetzmäßigkeiten scheint genetisch prädisponiert zu sein, wie zahlreiche Habituationsversuche mit Säuglingen zeigen (Wynn 1992). In Abbildung 1 sind die Grundzüge dieser Untersuchung dargestellt. Nachdem im Falle der Addition eine Figur erschienen ist, wird sie von einem Bildschirm verdeckt; dann geht eine zweite Figur hinter den Bildschirm. Anschließend wird der Bildschirm entfernt. Bei einer Gruppe von Versuchskindern (Säuglinge im Alter von sechs Monaten) waren – erwartungsgemäß – zwei Figuren zu sehen. Bei der anderen Gruppe von Kindern war – nicht erwartungsgemäß – nur eine Figur zu sehen. Gemessen wurde die Blickdauer der Kinder. Bei dem nicht erwartungsgemäßen Ereignis – also wenn bei der Addition nur eine Figur zu sehen war oder wenn bei der Subtraktion zwei Figuren zu sehen waren – schauten die Säuglinge länger hin.

Bei Stern (1998, 2002, 2003) werden klassische Arbeiten zur intuitiven Mathematik zusammengefasst, die zeigen, dass Menschen mit einer angeborenen Fähigkeit ausgestattet sind, die externe Umgebung hinsichtlich quantitativer Kriterien zu analysieren. Neuere Studien von Xu und Carey (1996) sprechen dafür, dass die Fähigkeit zur Quantifikation sogar zu einem früheren Zeitpunkt entwickelt ist als die Fähigkeit zur Individuierung von Objekten. Die bereits im Säuglingsalter zu beobachtenden intuitiven mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für den Erwerb des quantitativen Verständnisses und der Zählfertigkeit im Vorschulalter.

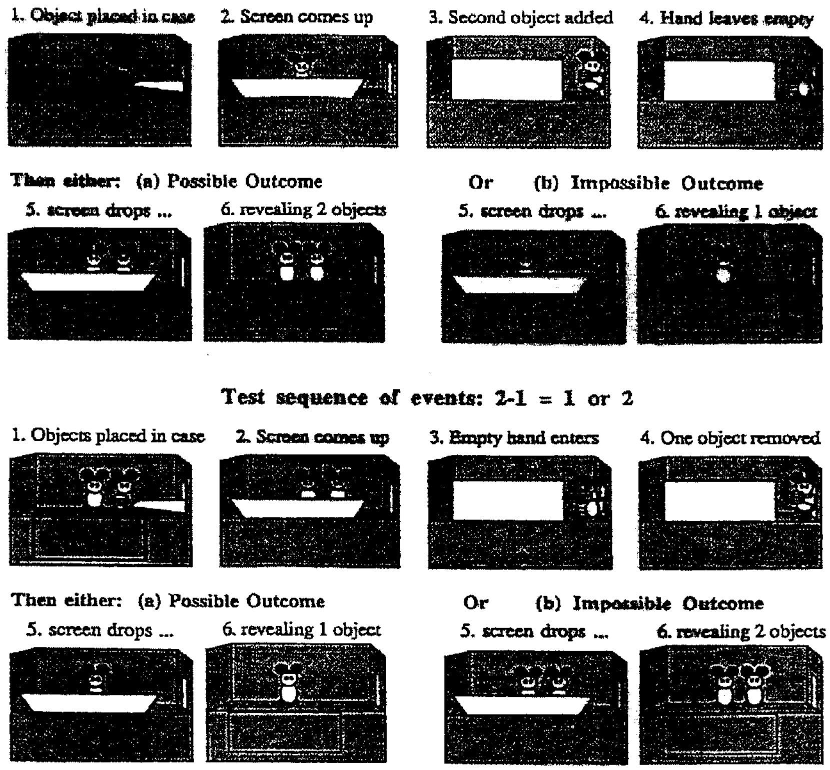



Abbildung 1: Versuchsanordnung bei Wynn (1992)

Die Leichtigkeit, mit der Kinder lernen, im kleineren Zahlenbereich zu zählen und die Veränderung von Mengen zu modellieren, steht im Widerspruch zu den Ergebnissen, die die großen Schwierigkeiten belegen, die Mathematik als Schulfach bereiten kann.

Aus der kulturvergleichenden Forschung wissen wir, dass alle – selbst die illiteraten – menschlichen Kulturen Zählwörter entwickelt haben. Hingegen gibt es in zahlreichen menschlichen Kulturen mit Schrift keine eigenen Symbole für Zahlwörter. Es sind aber gerade die Symbolsysteme, die die Grundlage für die Entwicklung der kulturellen Mathematik boten. Auch der intelligenteste Römer dürfte kaum in der Lage gewesen sein, CIV : XXVI = ? zu rechnen, während die Aufgabe 104 : 26 = ? auch von Grundschülern gelöst wird. Der Aufbau des Römischen Zahlensystems erlaubte keine Bruchrechnung und bot deshalb wenige Möglichkeiten zur konzeptuellen mathematischen Erweiterung.

Die Inhalte des schulischen Mathematikunterrichts sind das Ergebnis einer kulturellen Entwicklung. Einige Gebiete der Schulmathematik wurden erst vor wenigen Jahrhunderten entwickelt, wie zum Beispiel die Trigonometrie. Dies

**Repräsentation der Zahl 5**

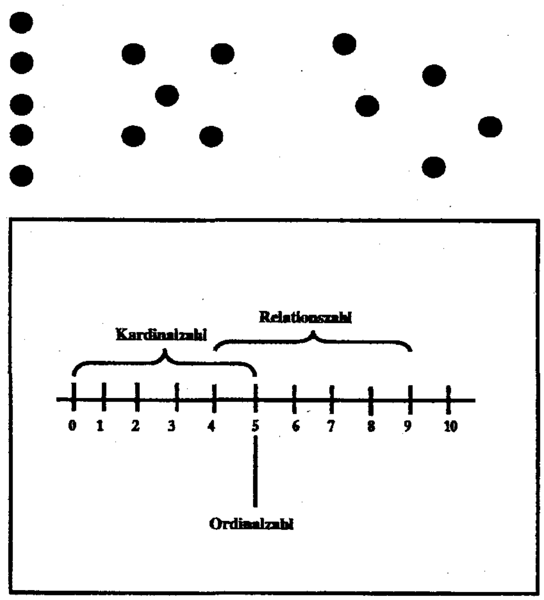



Abbildung 2: Die Repräsentation von »5« in der intuitiven (oberer Teil) und der kulturellen (unterer Teil) Mathematik

gilt auch für die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Herausforderung des schulischen Lernens besteht darin, dass durchschnittlich begabte Schüler in wenigen Jahren Inhalte erwerben müssen, an deren Entwicklung hochbegabte Wissenschaftler über mehrere Jahrhunderte gearbeitet haben.

Intuitives mathematisches Verständnis bedeutet die Übertragung der mathematischen Sprache auf Situationen der wahrnehmbaren Welt. Eine Menge von Gegenständen oder Ereignissen wird quantifiziert. Im oberen Teil der Abbildung 2 ist diese Ebene des mathematischen Verständnisses dargestellt. Darüber hinaus kann sich mathematisches Verständnis durch Wissen über Beziehungen zwischen Mengen ausdrücken. Das Verständnis von Zahlen als Abschnitt auf dem Zahlenstrahl geht in diese Richtung (s. unterer Teil der Abbildung). Der Zahlenstrahl selbst kann als eine kulturelle Erfindung gesehen werden. Bei der intuitiven Mathematik wird eine Verbindung zwischen mathematischen Symbolen und der realen Welt hergestellt, während in der kulturellen Mathematik unterschiedliche Symbole miteinander verknüpft werden.

Mit dem Übergang von der intuitiven zur kulturellen Mathematik lässt sich auch erklären, warum sich mathematische Textaufgaben mit gleicher mathematischer Struktur massiv in ihrer Schwierigkeit unterscheiden können (Stern 1998). Die Aufgabe: »Fünf Vögel haben Hunger. Sie finden drei Würmer«, kann von kaum einem Vorschulkind gelöst werden, wenn sie mit der Frage endet:

»Wie viel mehr Vögel als Würmer gibt es?«, während fast alle Kinder die Aufgabe lösen, wenn die Frage lautet: »Wie viele Vögel bekommen keinen Wurm?«

Ähnliche Effekte zeigen sich bei so genannten Angleichungsaufgaben:

»Hans hat acht Murmeln. Peter hat drei Murmeln. Wie viele Murmeln muss Peter noch bekommen, damit er genauso viele Murmeln hat wie Hans?«

Diese Aufgabe ist für Vorschulkinder sehr einfach zu lösen, während die gleiche Aufgabe mit der Frage »Wie viele Murmeln hat Peter weniger als Hans?« sehr schwer ist.

In den ersten beiden Jahren des Grundschulalters wurden deutliche Abweichungen in der Lösungsrate bei drei Aufgabentypen zur Addition und Subtraktion von Zahlen gefunden. Austauschaufgaben (»Maria hatte sechs Murmeln. Dann gab sie Hans vier Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?«) sind eher einfach zu lösen, während Aufgaben zum Vergleich von Mengen (»Maria hat neun Murmeln. Sie hat vier Murmeln mehr als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?«) sehr schwer sind.

Die Lösungsrate von Aufgaben zur Kombination von Mengen (»Maria und Hans haben zusammen sechs Murmeln. Maria hat vier Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans?«) liegt zwischen denen von Vergleichs- und Austauschaufgaben.

Wie kommt es zu den auffallenden Unterschieden in der Lösungsrate? Warum sind Aufgaben zum Vergleich von Mengen so schwer? Stern und Lehrndorfer (1992) und Stern (1993) konnten zeigen, dass die Diskrepanz nicht mit Unterschieden im Sprachverständnis zu erklären ist. Vielmehr lässt sich die Antwort aus Abbildung 2 ablesen. Vergleichsaufgaben erfordern ein fortgeschrittenes Zahlverständnis, das über die Zählfunktion von Zahlen hinausgeht. Die im Satz »Hans hat fünf Murmeln mehr als Peter« gegebene Information bezeichnet keine konkrete, existierende Menge, sondern beschreibt die *Relation* zwischen zwei Mengen. Man muss ein mentales Modell – also eine von den konkreten Dingen abstrahierte geistige Vorstellung – von der in der Textaufgabe beschriebenen Situation entwickeln. Wer beispielsweise mit der Zahl »Fünf« immer nur fünf Gegenstände verbindet, der wird den Satz nicht verstehen. Wer hingegen »fünf« als einen Abschnitt auf dem Zahlenstrahl versteht, der die Relation zwischen zwei anderen Zahlen markiert – zum Beispiel zwischen »Zwei« und »Sieben« oder zwischen »Vier« und »Neun«, der kann Vergleichsaufgaben verstehen.

Unterschiedliche Schwierigkeiten bei isomorpher mathematischer Struktur zeigten sich auch bei Aufgaben zur Multiplikation und zur Division. So genannte Aufteilungsaufgaben, zum Beispiel: a) »Jedes von vier Kindern soll drei Kekse bekommen. Wie viele Kekse werden benötigt?«, werden problemlos von allen Drittklässlern gelöst. Schwieriger hingegen sind Aufgaben zum multiplikativen Vergleich, zum Beispiel: b) »In Peters Portmonee sind vier Euro. In dem Portmonee von Hans ist dreimal soviel Geld. Wie viel Geld ist in dem Portmonee von Hans?« Diese Aufgabe wird nur von der Hälfte der Probanden gelöst.

Nur eine sehr geringe Lösungsrate hat hingegen die Aufgabe: c) »Es gibt vier Wege von A nach B und drei Wege von B nach C. Wie viele Wege gibt es von

A nach C über B?« Sie wurde von weniger als zehn Prozent der Sechstklässler in der Fortsetzungsstichprobe der SCHOLASTIK-Studie (Weinert u. Helmke 1997) gelöst.

Ein intuitives Verständnis von Multiplikation (und bei entsprechender Umformulierung auch von Division) drückt sich in Aufgabe a) aus. Multiplikation ist als wiederholte Addition zu verstehen, und Division bedeutet die Aufteilung in gleiche Teile. Kinder, deren Verständnis von Addition und Subtraktion sich auf die genannten Handlungen beschränkt, werden die Regel aufstellen, dass Multiplikation immer zur Vergrößerung und Division immer zur Verkleinerung von Mengen führt. Diese Regel trifft jedoch nur für natürliche Zahlen zu, und deshalb kann es beim Rechnen mit nichtnatürlichen Zahlen zu massiven Verständnisschwierigkeiten kommen.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass sich im Lösen bestimmter Textaufgaben in allen Altersstufen ein anspruchsvolles mathematisches Verständnis ausdrückt. Bei gleicher zugrunde liegender Formel sind einige Textaufgaben einfach, weil sie an ein intuitives Verständnis anknüpfen, während andere schwierig sind, weil das zugrunde liegende Situationsmodell nur über die kulturelle Mathematik zu erschließen ist.

An anderer Stelle (Stern u. Staub 2000; Stern 1997, 1998) wurde am Mathematikunterricht, wie er in Deutschland weit verbreitet ist, ausgiebig Kritik geübt. Es wurde gezeigt, dass das Potenzial mathematischer Textaufgaben in der Schule nicht genutzt wird. Wenn überhaupt mathematische Textaufgaben vorgegeben werden, dann sind es solche, die an das intuitive mathematische Verständnis anknüpfen. Die Möglichkeit, mit Hilfe von Textaufgaben das mathematische Verständnis zu erweitern, bleibt ebenso wie das Potenzial graphisch-visueller Veranschaulichungen weitgehend ungenutzt.

## Langfristige Effekte des Lösens von Textaufgaben: Ergebnisse aus der LOGIK-Studie

Obwohl die schulischen Lerngelegenheiten zum Erwerb von Kompetenzen im Umgang mit Textaufgaben gegenwärtig suboptimal sind, können viele Kinder in der frühen Grundschulzeit recht komplizierte Textaufgaben lösen (Stern 1998). Die am Münchener Max-Planck-Institut für psychologische Forschung in den achtziger Jahren initiierten Längsschnittstudien LOGIK (Weinert 1998; Weinert u. Schneider 1999) und SCHOLASTIK (Weinert u. Helmke 1997) geben Auskunft über die langfristige Entwicklung von interindividuellen Unterschieden bei mathematischen Kompetenzen. In der Individualstudie LOGIK, an der circa 200 Kinder über einen Zeitraum von 14 Jahren teilnahmen, wurden bereits in der Vorschulzeit numerische Basiskompetenzen erhoben. Eine letzte Erhebung wurde vorgenommen, als die Schüler 17 Jahre alt waren. Die Ergebnisse zu diesem Alterszeitpunkt stehen hier im Mittelpunkt. In der Schulstudie SCHOLASTIK wurden die Kinder der Individualstichprobe LOGIK zusätzlich zusammen mit ihren Klassenkameraden unterschiedlichen Leistungstests unterzogen. Der kombinierte Datensatz aus LOGIK und SCHOLASTIK erlaubt es, Aussagen über die Entwicklung interindividueller Kompetenzunterschiede sowie über die Vorhersagbarkeit von Leistungsunterschieden zu machen.

Eine Frage, die in diesem Zusammenhang natürlich von großem Interesse ist, ist die *Vorhersagbarkeit der Mathematikleistung* in der elften Klasse aus früheren Messzeitpunkten. Mit anderen Worten, werden bereits in der Grundschule die Weichen für die spätere mathematische Leistung gestellt? Eine weitere Frage, die in diesem Zusammenhang von Interesse ist, betrifft die Inhalte der Prädiktoren. Welche Rolle spielt die allgemeine Intelligenz und welche Rolle spielt spezifisches Vorwissen in Mathematik?

In der folgenden Auswertung werden 58 Schüler berücksichtigt, die zum letzten Messzeitpunkt der LOGIK-Studie in der elften Klasse auf dem Gymnasium oder einer Fachoberschule waren. Zum letzten Messzeitpunkt, also im Alter von 17 Jahren, wurden allen Teilnehmern Aufgaben aus dem für die Mittelstufe entwickelten Test der Third International Mathematics and Science Study (TIMSS, Baumert et al. 1997) vorgegeben. Da dieser Test vorwiegend den Schulstoff der achten Klasse erfasste, sind die Aufgaben natürlich zu einfach für die 17-Jährigen. Andererseits hätte die Vorgabe eines Tests, der den Schulstoff der elften Klasse erfasst, den Nachteil, dass dieser Stoff bis zum Testzeitpunkt möglicherweise nicht in allen Klassen der teilnehmenden Schüler behandelt worden war. Wir

**Zwei Beispielaufgaben:**

Welcher x-Wert erfüllt die Gleichung $x^2 - 14x + 49 = 0$

A) 7 und 0
B) 7
C) –14
D) 7 und –7
E) 14 und 0

Ein Buch hat 120 Seiten und 45 Zeilen auf jeder Seite. Die Autorin möchte ihr Buch auf 150 Seiten ausweiten, ohne zusätzlichen Text zu schreiben. Wie viele Zeilen pro Seite hat das Buch unter dieser Voraussetzung?

A) 36
B) 34
C) 30
D) 40
E) 38

entschlossen uns deshalb, einige Multiple-Choice-Aufgaben aus der TIMSS-Studie vorzugeben, aber unter Zeitdruck.

Insgesamt wurden 20 Aufgaben vorgegeben, für die zehn Minuten Zeit vorgesehen waren. Auch für einen guten Mathematiker dürfte es sehr schwer sein, in dieser Zeit alle Aufgaben zu lösen. Die Anzahl der gelösten Aufgaben kann deshalb als ein valider Indikator für die mathematische Problemlösungskompetenz gesehen werden. Inwiefern lassen sich Leistungsunterschiede im TIMSS-Test durch frühere Leistungsunterschiede vorhersagen? Folgende Maße wurden einbezogen:

- *Allgemeine Intelligenz*
  In LOGIK wurde in (fast) jedem Jahr ein Intelligenztest durchgeführt. In der zweiten und vierten Klasse handelte es sich um einen nichtsprachlichen Test, in der dritten und sechsten Klasse um einen sprachlichen Test. In der elften Klasse wurden beide Arten von Tests vorgegeben, die in dieser Analyse zu einem Wert zusammengefasst wurden, weil eine getrennte Auswertung zu gleichen Ergebnissen führte.
- *Rechenfertigkeit in der Grundschule*
  In den Klassenstufen zwei, drei und vier wurden einfache Rechenaufgaben mit zwei Zahlen vorgegeben, die den Anforderungen der jeweiligen Klassenstufe entsprachen.
- In den Klassenstufen zwei, drei, vier, fünf und sechs wurden Textaufgaben vorgegeben, deren Lösung ein *anspruchsvolles mathematisches Verständnis* erforderte. Dazu gehörten komplexe Vergleichsaufgaben, wie zum Beispiel »Peter hat fünf Murmeln. Susanne hat drei Murmeln mehr als Peter. Wie viele Murmeln haben Susanne und Peter zusammen?« und Aufgaben zum kartesischen Produkt, wie: »Es gibt drei Wege von A nach B und vier Wege von B nach C. Wie viele Wege gibt es von A nach C über B?«, sowie in der fünften und sechsten Klasse Aufgaben zum proportionalen Denken.

Wie korrelieren diese Maße mit der Mathematikleistung in der elften Klasse? Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 aufgeführt. Als wichtigste Ergebnisse lassen sich festhalten:

**Tabelle 1:** Korrelationen zwischen der Mathematikleistung in der 11. Klasse und anderen Maßen

| Klasse | Lösen von Textaufgaben | Rechnen | Intelligenz |
|---|---|---|---|
| 2 | .58** | .22 | .04 |
| 3 | .45** | .21 | .45** |
| 4 | .42** | .25 | .44** |
| 5 | .46** | – | – |
| 6 | .49** | – | .42** |
| 11 | – | – | .41** |

– keine Erhebungen; **p < .01

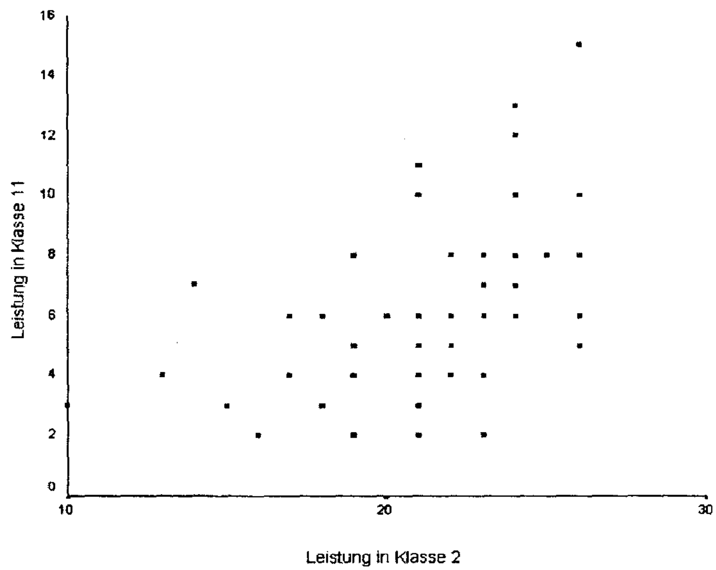



**Abbildung 3:** Die Beziehung zwischen der Mathematikleistung in der 2. und 11. Klasse im Scatterplot

Das Lösen von Textaufgaben in der zweiten Klasse korreliert mit r = .58 rein deskriptiv höher als alle anderen Maße mit der Mathematikleistung der elften Klasse. In Abbildung 3 ist diese Korrelation als Scatterplot dargestellt. Diesem ist einerseits zu entnehmen, dass der Zusammenhang nicht auf Ausreißer zurückzuführen ist, sondern dass ein sehr großer Teil der Stichprobe zum Zusammenhang beiträgt. Gleichzeitig zeigt sich auch – und die Bedeutung dieses Ergebnisses kann gar nicht hoch genug eingeschätzt werden –, dass alle Probanden, die nicht zum Zusammenhang beitragen, eine ähnliche Entwicklung nehmen. Dem Scatterplot ist zu entnehmen, dass die linke obere Hälfte völlig unbesetzt ist. Mit anderen Worten, kein Teilnehmer der LOGIK-Studie, der nicht bereits in der zweiten Klasse überdurchschnittliche Leistungen im Lösen von Textaufgaben zeigte, erreichte in der elften Klasse gute bis sehr gute Werte. Hingegen ist die rechte untere Hälfte mit einigen Probanden besetzt, die zwar in der zweiten Klasse noch überdurchschnittliche Leistungen erbrachten, später aber in den durchschnittlichen oder gar unterdurchschnittlichen Bereich zurückfielen. Aus den Daten geht hervor, dass ein frühes mathematisches Verständnis, das sich im Lösen von anspruchsvollen Textaufgaben ausdrückt, eine notwendige, aber keinesfalls hinreichende Voraussetzung für spätere mathematische Kompetenzen ist.

Überaus bemerkenswert ist, dass die in der elften Klasse gemessene Intelligenzleistung niedriger mit der Mathematikleistung der elften Klasse korreliert als die Mathematikleistung der zweiten Klasse. Sprachliche und nichtsprachliche Intelligenz unterscheiden sich nicht in ihrer Vorhersagekraft, und die Rechenleistung in der Grundschule sagt die spätere Mathematikleistung nicht vorher. Die Ergebnisse sprechen dafür, dass mathematische Kompetenzen im späteren Schulalter das Ergebnis eines kumulativen Lernprozesses sind. Wer bereits zu einem frühen Zeitpunkt anspruchsvolles Wissen verfügbar hatte, kann auf dieser Grundlage anspruchsvolle Kompetenzen aufbauen und seinen Vorsprung immer weiter ausbauen.

## Warum haben manche Schülerinnen und Schüler besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen?

Während in der Grundschule nur eine Minderheit von Schülern größere Schwierigkeiten mit den schulischen Anforderungen in Mathematik hatte, nehmen die Probleme in der Sekundarstufe deutlich zu. Immer häufiger ist zu beobachten, dass auch sehr intelligente Kinder in Mathematik versagen. Die Ursachen für Schwierigkeiten mit der Mathematik kann man in der intuitiven und in der kulturellen Mathematik suchen. Nur ganz wenige Kinder haben Schwierigkeiten mit dem Zählen. Dazu gehören Kinder mit Down-Syndrom (Gelman u. Cohen 1988). Aufgrund eines genetischen Defekts scheint Menschen mit Down-Syndrom – obwohl sie sich sprachlich recht gut verständigen können – der Zugang zur intuitiven Mathematik versperrt zu sein. Auch wenn sich keine genetischen Defekte finden lassen, können Probleme im intuitiven mathematischen Verständnis zum Beispiel als Ergebnis cerebraler Störungen auftreten. Eine Störung im intuitiven mathematischen Verständnis kann bei Kindern angenommen werden, die auch nach der zweiten Klasse noch Schwierigkeiten bei der Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 20 haben. Weit häufiger als Störungen in der intuitiven Mathematik treten jedoch Probleme mit der kulturellen Mathematik auf. Die Schüler verstehen, dass man Zahlen zum Zählen und zur Bestimmung der Mächtigkeit von Mengen nutzt, aber die Nutzung von Zahlen als Instrumente der Modellierung ist ihnen unbekannt. Diese konzeptuelle Umstrukturierung des mathematischen Denkens wird in der gegenwärtigen deutschen Grundschulmathematik kaum unterstützt. Addition und Subtraktion werden ebenso wie die Multiplikation und die Division als Methoden zur Verkleinerung oder Vergrößerung von Mengen gelehrt. Zudem wird den Schülern der Eindruck vermittelt, dass es für die Lösung jedes mathematischen Problems nur eine Methode gibt. Hier zeigen sich bedeutsame kulturelle Unterschiede im Mathematikunterricht, die beispielsweise auch im Vergleich von ostasiatischen und US-amerikanischen Klassen offensichtlich wurden (Stigler u. Baranes 1988). Deutsche Grundschulkinder – und dies gilt sicher auch für viele andere westliche Länder – lernen in den ersten Grundschuljahren Mathematik in Form von Rezepten zur Lösung von Rechenaufgaben kennen. Im Unterricht wird ihnen der Eindruck vermittelt, dass es das Beste für sie ist, die von den Lehrern entwickelten Lösungswege zu übernehmen. Tatsächlich durchläuft die Mehrheit der Kinder auf diese Weise den Mathematikunterricht der Grundschule ohne größere konzeptuelle Schwierigkeiten. Probleme treten auf, weil die Rechenstrategien noch nicht reibungslos ablaufen oder die mathematischen Netzwerke, die beispielsweise zum Abrufen des Einmaleins benötigt werden, noch nicht perfektioniert sind. Dass mathematische Symbole als ein Spiel mit Regeln verstanden werden können, mit dessen Hilfe man neue Ideen entwickelt, wird nicht vermittelt. Dies wird am deutlichsten bei der Bearbeitung von mathematischen Textaufgaben, wie bereits ausführlich an anderer Stelle dargestellt (Stern 1994; Stern u. Staub 2000). Die Beschränkung auf Austausch- und Kombinationsaufgaben sowie die Vorgabe fester Rechenwege engt den Spielraum der Kinder ein, wie bereits bei Stern (1998) diskutiert wurde. Die Kinder machen keine kreativen Erfahrungen im Umgang mit mathematischen Symbolsystemen und lernen deren Potenzial als Werkzeug zum Aufbau neuer Wissensstrukturen nicht kennen. Diese Defizite werden dann offensichtlich, wenn die Mathematik der Sekundarstufe ein erweitertes Verständnis von Zahlen und mathematischen Operationen erfordert. Wenn Addition und Subtraktion nur als die Verkleinerung oder Vergrößerung von Mengen verstanden wird, bereitet das Verständnis negativer Zahlen Schwierigkeiten. Wenn Kinder die Multiplikation nur als wiederholte Addition und die Division nur als Aufteilung von Mengen kennen gelernt haben, werden sie später nicht verstehen, warum bei der Multiplikation mit einem Faktor kleiner eins das Produkt kleiner als der zweite Faktor beziehungsweise bei einem Nenner kleiner eins der Quotient größer als der Zähler sein kann. Die vermehrte Vorgabe anspruchsvoller Textaufgaben in der Grundschule, wie zum Beispiel mehrstufige Vergleichsaufgaben, könnte ein Weg zur rechtzeitigen Erweiterung des mathematischen Verständnisses sein. Positive Effekte der Vorgabe von anspruchsvollen Textaufgaben sind allerdings nur zu erwarten, wenn sich auch die Bearbeitung von Textaufgaben im Unterricht ändert. Die in Deutschland übliche, sehr lehrerzentrierte und kleinschrittige Behandlung von Textaufgaben entmündigt die Schüler. Sie versuchen nicht, eigenständige Lösungen für komplexe Probleme zu entwickeln, sondern fragen ihr Gedächtnis nach Lösungsstrategien ab, die vom Lehrer vorgeführt wurden. Eine kleinschrittige Vorgehensweise im Unterricht spiegelt sich in der Auffassung vieler Lehrer zum Lernen wider: Es wird davon ausgegangen, dass das Wissen des Lehrers direkt auf den Schüler übertragen wird. Die – aus wissenschaftlicher Sich adäquate – konstruktivistische Vorstellung von Lernen, wonach Schüler aus der dargebotenen Information die Aspekte auswählen, die sich an ihr bisheriges Wissen anknüpfen lassen, ist nur selten bei Lehrern verankert. Es gibt inzwischen gut erprobte Fragebögen, die Vorstellungen von Lehrern beim Mathematiklernen erfassen (dazu: Staub u. Stern 2002). Lehrer, die eher Aussagen zustimmten wie: »Kinder lernen Mathematik am besten, indem sie selber herausfinden, wie sie zu Antworten auf einfache Textaufgaben kommen«, oder: »Kinder sollten viele informelle Erfahrungen mit dem Lösen von einfachen Textaufgaben sammeln, ehe man von ihnen erwarten kann, dass sie sich an Zahlenfakten erinnern«, drücken eine konstruktivistische Einstellung aus. Lehrer hingegen, die Aussagen zustimmen wie: »Ein guter Lehrer führt vor, auf welche Weise man eine Textaufgabe am besten löst«, oder: »Es sollte Zeit auf das Üben von Rechenverfahren verwendet werden, ehe man von Kindern erwarten kann, dass sie die Verfahren verstehen«, drücken aus, dass sie sich Lernen als direkte, lehrergesteuerte Übertragung vorstellen. Ergebnisse der Münchener SCHOLASTIK-Studie zeigten, dass in Klassen, in denen Lehrer mit einer eher konstruktivistischen Einstellung vom Lernen unterrichteten, ein größerer Lernfortschritt zu verzeichnen war als in Klassen, in denen die Lehrer eher einer Vorstellung von direkter Übertragung anhingen (Staub u. Stern 2002). Eine konstruktivistische Vorstellung von Lernen drückt also berechtigtes Vertrauen in die Eigenaktivitäten der Schüler aus. Wünschenswert wäre, dass Grundschullehrer eine konstruktivistische Vorstellung vom Lernen übernehmen und sie in Verhalten umsetzen.

Die Struktur jeder mathematischen Textaufgabe lässt sich graphisch-visuell veranschaulichen, und von dieser Repräsentation lassen sich mathematische Lösungswege ableiten. Im gegenwärtigen Mathematikunterricht wird jedoch nur sehr selten von graphisch-visuellen Veranschaulichungen Gebrauch gemacht (Stern u. Staub 2000; Stern 2002). Im Projekt ENTERPRISE (Enhancing knowledge-transfer and efficient reasoning by practicing representation in science edu-

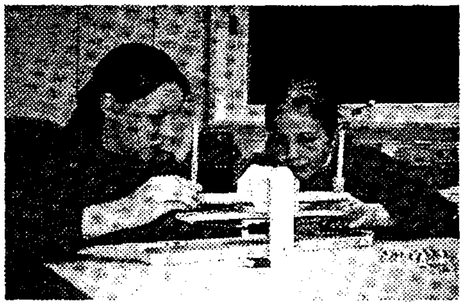
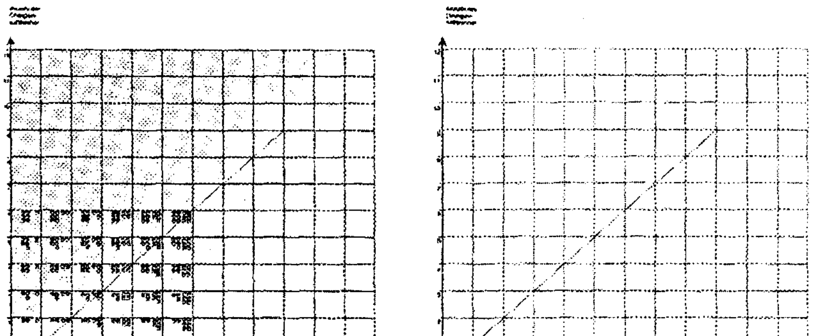


**Abbildung 4:** Im ENTERPRISE-Projekt verwendete externe Repräsentationsformen zur Vermittlung proportionaler Konzepte



cation) am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung wurde gezeigt, dass bereits Viertklässler mit Hilfe eines Graphen einer linearen Funktion proportionale Misskonzepte wie zum Beispiel 7 : 5 = 6 : 4 aufgeben (Koerber 2003). Mit Hilfe von externen Repräsentationen wie einer Balkenwaage lernen Drittklässler, dass man Volumen und Masse berücksichtigen muss, um zu entscheiden, ob ein Gegenstand im Wasser schwimmt oder sinkt (Stern et al. 2002a, 2002b). Ohne die Hilfe externer Repräsentationsformen berücksichtigen Kinder lediglich das Gewicht und kommen deshalb zu dem falschen Schluss, dass ein schwerer Baumstamm sinkt, während eine leichte Nadelspitze schwimmt. In Abbildung 4 sind die im ENTERPRISE-Projekt verwendeten Repräsentationsformen zu sehen.

Gegenwärtig gibt es eine überwältigende Anzahl von Studien, in denen gezeigt wird, dass Grundschulkinder in Mathematik und in den Naturwissenschaften deutlich bessere Leistungen erbringen könnten, wenn ihnen anspruchsvollere Lernangebote gemacht und sie zudem stärker zu eigenständigem Lernen angehalten würden. In diesem Zusammenhang stellt sich natürlich die Frage, ob ein höheres Anspruchsniveau nicht für Kinder mit ungünstigeren Eingangsbedingungen – dazu gehören zum Beispiel Kinder, die an Dyskalkulie leiden – nicht kontraindiziert ist. Sind solche Kinder nicht heillos überfordert wenn sie noch Zusätzliches wie beispielsweise die Nutzung graphisch-visueller Veranschaulichungen lernen müssen? Sollten diese Kinder nicht durch kleinschrittiges Vorgehen »an die Hand genommen« werden, damit sie wenigstens einige Rechenroutinen lernen, wenn ihnen schon das tiefere Verständnis fehlt? Gegen eine derartige Auffassung können Wissenschaftler in erfreulich eindeutiger Weise Stellung beziehen: Es zeigt sich in mehreren Studien, dass Schüler mit eher ungünstigeren Voraussetzungen sich unter anspruchsvollen Lernbedingungen eher besser entwickeln als unter weniger anspruchsvollen Bedingungen. Lehrer mit einer konstruktivistischen Grundhaltung zum Lernen vernachlässigten die leistungsschwachen Kinder keineswegs (Stern u. Staub 2000). Selbst die Rechenleistungen sind in Klassen mit konstruktivistischen Lehrern eher besser als in Klassen mit Lehrern, die meinen, dass man im Mathematikunterricht vorwiegend numerische Aufgaben üben sollte. Gerade Kinder mit ungünstigeren Voraussetzungen benötigen besondere Anregungen, um das Potenzial mathematischer Symbole bei der Konstruktion von Bedeutung zu verstehen. Für sie erschließt sich die Tragweite des Buchtitels von Keith Devlin (1998): »Die Sprache der Mathematik: Das Unsichtbare sichtbar machen«, nur mit besonderer Unterstützung. Deshalb haben gerade Kinder mit Rechenschwierigkeiten einen Anspruch auf einen anregenden Mathematikunterricht.

## Literatur

Baumert, J.; Gruehn, S.; Heyn, S.; Köller, O.; Schnabel, K. (1997): Bildungsverläufe und psychosoziale Entwicklung im Jugendalter. Dokumentation. Berlin.

Gelman, R.; Cohen, M. (1988): Qualitative differences in the way Down's syndrome and normal children solve a novel counting problem. In: Nadel, N. (Hg.): The psychobiology of Down's syndrome. Cambridge, S. 51–99.

Koerber, S. (2003): Visualisierung als Werkzeug im Mathematikunterricht. Hamburg.

Sodian, B. (1995): Entwicklung bereichsspezifischen Wissens. In: Oerter, R.; Montada, L.: Entwicklungspsychologie. Weinheim, S. 622–653.

Staub, F.; Stern, E. (2002): The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: quasi-experimental evidence from elementary mathematics. Journal of Educational Psychology 93: 144–155.

Stern, E. (1993): What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so hard for children? Journal of Educational Psychology 85: 7–23.

Stern, E. (1994): Die Erweiterung des mathematischen Verständnisses mit Hilfe von Textaufgaben. Grundschule 26: 23–25.

Stern, E. (1997): Das Lösen mathematischer Textaufgaben: Wie Kinder lernen, was sie nicht üben. In: Weinert, F. E.; Helmke, A. (Hg.): Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim, S. 157–170.

Stern, E. (1998): Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter. Lengerich.

Stern, E. (2002): Wie abstrakt lernt das Grundschulkind? Neuere Ergebnisse der entwicklungspsychologischen Forschung. In: Petillon, H. (Hg.): Jahrbuch Grundschulforschung, Band 5: Individuelles und soziales Lernen – Kindperspektive und pädagogische Konzepte. Leverkusen, S. 22–28.

Stern, E. (2003): Kompetenzerwerb in anspruchsvollen Inhaltsgebieten bei Grundschulkindern. In: Cech, D.; Schwier, H. J. (Hg.): Lernwege und Aneignungsformen im Sachunterricht. Bad Heilbrunn, S. 37–58.

Stern, E.; Lehrndorfer, A. (1992): The role of situational context in solving word problems. Cognitive Development 7: 259–268.

Stern, E.; Staub, F. (2000): Mathematik lernen und verstehen: Anforderungen an die Gestaltung des Mathematikunterrichts. In: Inckermann, E.; Kahlert, J.; Speck-Hamdan, A. (Hg.): Sich Lernen leisten. Grundschule vor den Herausforderungen der Wissenschaft. Neuwied, S. 90–100.

Stern, E.; Hardy, I.; Koerber, S. (2002): Die Nutzung graphisch-visueller Repräsentationsformen im Sachunterricht. In: Spreckelsen, K.; Hartinger, A.; Möller, K. (Hg.): Ansätze und Methoden empirischer Forschung zum Sachunterricht. Bad Heilbrunn, S. 119–131.

Stern, E.; Möller, K.; Hardy, I.; Jonen, A. (2002): Warum schwimmt ein schwerer Baumstamm im Wasser? Der Erwerb physikalischer Konzepte im Grundschulalter. Physik Journal 3: 63–67.

Stigler, J. W.; Baranes, R. (1988): Culture and mathematics learning. Review of Research in Education 15: 253–305.

Weinert, F. E. (1998): Entwicklung im Kindesalter – Bericht über eine Längsschnittstudie. Weinheim.

Weinert, F. E.; Helmke, A. (Hg.) (1997): Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim.

Weinert, F. E.; Schneider, W. (Hg.) (1999): Individual development from 3 to 12: Findings from the Munich longitudinal study. Cambridge.

Wynn, K. (1992): Addition and subtraction by human infants. Nature 358: 749–750.

Xu, F.; Carey, S. (1996): Infants' metaphysics: The case of numerical identity. Cognitive Psychology 30(2): 111–154.