MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PSYCHOLOGISCHE FORSCHUNG

LEOPOLDSTRASSE 24 80802 MÜNCHEN / POSTFACH 440109 80750 MÜNCHEN

Die Erweiterung des mathematischen Verständnisses mit Hilfe von Textaufgaben

Elsbeth Stern

In: Grundschule, März 3/1994, Jg. 26, 23-25.

Reprint 3/1994

MAX PLANCK INSTITUTE FOR PSYCHOLOGICAL RESEARCH

LEOPOLDSTRASSE 24 D-80802 MÜNCHEN / POSTFACH 440109 D-80750 MÜNCHEN

Elsbeth Stern

Die Erweiterung des mathematischen Verständnisses mit Hilfe von Textaufgaben

Damit Schüler und Schülerinnen nicht in die Versuchung geraten, nur intuitiv zu richtigen mathematischen Ergebnissen zu kommen, können sie durch das Lösen von Text-, insbesondere Vergleichsaufgaben, ihr mathematisches Verständnis erweitern.

Die meisten der in der Grundschulzeit vorgegebenen Textaufgaben bauen auf dem bereits in der Vorschulzeit entwickelten Verständnis auf, wonach Zahlen zur Abbildung von Mengen herangezogen werden und mathematische Operationen wie Addition und Subtraktion Mengenveränderungen beschreiben. Zur Bewältigung der in der Sekundarstufe gestellten mathematischen Anforderungen wird jedoch ein erweitertes mathematisches Verständnis benötigt: Zahlen und mathematische Operationen müssen auch als Möglichkeiten verstanden werden, die Beziehungen zwischen Mengen darzustellen. Die Bearbeitung bestimmter Textaufgaben kann dieses Verständnis fördern.

Textaufgaben im Grundschulunterricht

In unterschiedlichen westlichen Ländern wurde gezeigt, daß im Mathematikunterricht deutlich weniger Zeit auf die Behandlung von Textaufgaben verwendet wird als auf die Behandlung von rein numerischen Aufgaben. *Alexander Renkl* hat in seiner am Münchener Max-Planck-Institut für psychologische Forschung durchgeführten Doktorarbeit gezeigt, daß z.B. im dritten Schuljahr im Durchschnitt weniger als 20% der zur Bearbeitung von Rechenaufgaben genutzten Unterrichtszeit auf die Behandlung von Textaufgaben entfällt. Die häufigere Bearbeitung von Textaufgaben im Grundschulunterricht ist jedoch aus zwei Gründen wünschenswert:

- Es kann nicht erwartet werden, daß das an numerischen Aufgaben erworbene Wissen „automatisch" zum Lösen von Textaufgaben herangezogen wird. Vielmehr zeigt sich, daß auch Kinder, die gut rechnen können, Schwierigkeiten mit der Ableitung der Gleichung aus dem Text haben.
- Die Beschäftigung mit bestimmten Textaufgaben ermöglicht eine Erweiterung des mathematischen Verständnisses, die durch die Bearbeitung rein numerischer Aufgaben nicht erlaubt wird. Der zweite Aspekt steht im weiteren im Mittelpunkt.

Das Lösen von Textaufgaben aus psychologischer Sicht

In den letzten Jahren wurden weltweit mathematische Textaufgaben häufig in entwicklungspsychologischen Arbeiten herangezogen, um Problemlöseprozesse im Kindesalter zu untersuchen.
Im Mittelpunkt unserer Arbeiten am Max-Planck-Institut für psychologische Forschung in München stand die Frage, warum Textaufgaben, die lediglich die Addition und die Subtraktion zweier Zahlen erfordern, sich vehement in ihrem Schwierigkeitsgrad unterscheiden können. In unterschiedlichsten Untersuchungen konnte gezeigt werden, daß die Schwierigkeit einer Aufgabe weniger von der Größe der vorkommenden Zahlen oder von der erforderlichen Rechenoperation abhängt, sondern vielmehr von der geschilderten Situation und von der gesuchten Menge. Für die Addition und die Subtraktion lassen sich 16 prototypische Textaufgaben identifizieren, in denen vier Situationen beschrieben werden:

- die Kombination,
- der Austausch,
- der Vergleich und
- die Angleichung von Mengen.

Für Austausch-, Kombinations- und Vergleichsaufgaben wurde gezeigt, daß je nachdem, welche Mengen bekannt sind und welche Menge gesucht wird, die Schwierigkeit variieren kann. In Abbildung 1 sind diese prototypischen Aufgaben zusammen mit dem prozentualen Anteil der Erstkläßler, die die Aufgabe korrekt lösten (*Stern* 1992), dargestellt (S. 24).
Beachtenswert sind die Schwierigkeitsunterschiede zwischen Vergleichsaufgaben mit unbekannter Differenzmenge (3.1.1, 3.1.2) und Angleichungsaufgaben (4.1, 4.2). Obwohl sich beide Aufgabentypen lediglich in der Formulierung der Frage unterscheiden, können Angleichungsaufgaben von fast allen Erstkläßlern gelöst werden, während nur ein Drittel der gleichen Kinder die Vergleichsaufgaben lösen. Schwierigkeitsunterschiede zwischen den 16 Typen von Textaufgaben lassen sich auch noch bei älteren Kindern nachweisen. In einer unserer Studien zeigte sich, daß 30% der Drittkläßler Vergleichsaufgaben mit unbekannter Referenzmenge (3.3) fehlerhaft lösen.

Warum sind Vergleichsaufgaben so schwer?

Drei mögliche Ursachen sind für die Schwierigkeiten der Kinder beim Lösen von Vergleichsaufgaben denkbar:
(1) mangelnde Übung,
(2) Schwierigkeiten im Sprachverständnis und
(3) Schwierigkeiten im mathematischen Verständnis.

(1) Durch unterschiedliche Studien wird belegt, daß Vergleichsaufgaben äußerst selten in Rechenbüchern und im Mathematikunterricht vorkommen. Eine Sichtung der in den ersten Grundschuljahren eingesetzten Mathematikbücher ergab, daß es sich bei weniger als 5% der Textaufgaben um Vergleichsaufgaben handelt. Es wäre jedoch unangemessen, die Schwierigkeiten beim Lösen von Vergleichsaufgaben ausschließlich auf mangelnde Übung zurückzuführen. Auch Austausch-, Kombinations- und Angleichungsaufgaben werden eher selten im Unterricht behandelt. Da die Kinder aber mit einigen dieser Aufgaben, selbst wenn sie zuvor selten oder nie bearbeitet wurden, keinerlei Schwierigkeiten haben, gibt es gute Gründe für die Annahme, daß Vergleichsaufgaben „von Natur aus" schwerer sind als andere Aufgabentypen.

(2) Sind Vergleichsaufgaben schwerer als andere Aufgaben, weil sie höhere Anforderungen an das Sprachverständnis stellen als die anderen Aufgabentypen? Bei Vor- und Grundschulkindern sind Probleme beim Verständnis der Begriffe „mehr" und „weniger" gut dokumentiert. Sind also Vergleichsaufgaben so schwer, weil Kinder Formulierungen wie „wieviel mehr (weniger) als" und „3 mehr (weniger) als" nicht verstehen können? In einer Serie von Untersuchungen (vgl. *Stern* 1993) konnten

wir zeigen, daß Vorschulkinder und Erstkläßler keine prinzipiellen Probleme mit dem Verstehen dieser Formulierungen haben.
Kinder, die in einem Vortest noch große Schwierigkeiten mit dem Lösen von Vergleichsaufgaben hatten, konnten diese Aufgaben problemlos bearbeiten, wenn zuvor eine Geschichte erzählt wurde, in der das Ziel thematisiert wurde, zwei Mengen anzugleichen. In der Geschichte beklagte sich ein Kind bei seiner Mutter, daß es gegenüber seinem Bruder benachteiligt sei, und verlangte Gleichbehandlung. Nachdem die Teilnehmer unserer Untersuchungen diese Geschichte gehört hatten, bereitete ihnen das Verstehen von Formulierungen wie „Wieviel mehr [weniger]“ und „3 mehr [weniger] als“ keine Probleme mehr. In einer anderen Untersuchung konnte gezeigt werden, daß bereits Erstkläßler Sätze wie „Hans hat 5 Murmeln mehr als Peter“ und „Peter hat 5 Murmeln weniger als Hans“ verstehen, aber noch nicht wissen, daß beide Sätze den gleichen Sachverhalt beschreiben.
Unsere Ergebnisse sprechen dafür, daß bereits Erstkläßler unter bestimmten Bedingungen durchaus die in den Vergleichsaufgaben vorkommenden sprachlichen Formulierungen verstehen können. Also können die Schwierigkeiten der Kinder mit dem Lösen von Vergleichsaufgaben nicht allein mit mangelndem Sprachverständnis erklärt werden.
(3) Vergleichsaufgaben stellen aber höhere Anforderungen an das mathematische Verständnis als die übrigen Aufgabentypen. Aufgaben zur Angleichung, zur Kombination und zum Austausch von Mengen enthalten ausschließlich konkrete, abzählbare Mengen. Die Differenzmenge einer Vergleichsaufgabe (z. B. „Hans hat 5 Murmeln mehr als Peter“) ist hingegen keine konkrete, zählbare Menge, sondern sie beschreibt die Beziehung zwischen zwei Mengen. Das Verstehen von Vergleichsaufgaben erfordert deshalb ein abstrakteres Verständnis von Zahlen. Auch an das Verständnis von Addition und Subtraktion stellen Vergleichsaufgaben höhere Anforderungen als die anderen Aufgabentypen. Beim Austausch, der Kombination und der Angleichung von Mengen werden konkrete Mengenveränderungen vorgenommen, die an einen zeitlichen Ablauf gebunden sind. Einer bestehenden Menge werden entweder Elemente hinzugefügt oder entfernt. Beim Vergleich von Mengen hingegen wird die Addition oder die Subtraktion zur Beschreibung der Beziehung zwischen den beteiligten Mengen benutzt.
Warum können Kinder Vergleichsaufgaben lösen, wenn diese in eine Kontextgeschichte eingebettet wurden, in der sich ein Kind über Benachteiligung beklagt und Gleichbehandlung fordert? Warum können sie in diesem Zusammenhang Formulierungen wie „Hans hat 3 Murmeln mehr als Peter“ verstehen? Das läßt sich durch die

	Prozentsatz deutscher Erstkläßler, die die Aufgabe lösten
1. Kombinationsaufgaben	
1.1 Gesamtmenge unbekannt	
1.1.1 Maria hat 3 Murmeln. Hans hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln haben die beiden zusammen?	87%
1.2 Teilmenge unbekannt	
1.2.1 Maria und Hans haben zusammen 8 Murmeln. Maria hat 7 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans?	55%
2. Austauschaufgaben	
2.1 Endmenge unbekannt	
2.1.1 Maria hatte 3 Murmeln. Dann gab ihr Hans 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?	89%
2.1.2 Maria hatte 6 Murmeln. Dann gab sie Hans 4 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?	95%
2.2 Austauschmenge unbekannt	
2.2.1 Maria hatte 2 Murmeln. Dann gab ihr Hans einige Murmeln. Jetzt hat Maria 9 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans ihr gegeben?	52%
2.2.2 Maria hatte 8 Murmeln. Dann gab sie Hans einige Murmeln. Jetzt hat Maria 3 Murmeln. Wie viele Murmeln hat sie Hans gegeben?	49%
2.3 Startmenge unbekannt	
2.3.1 Am Anfang hatte Maria einige Murmeln. Dann gab ihr Hans 3 Murmeln. Jetzt hat Maria 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte sie am Anfang?	49%
2.3.2 Am Anfang hatte Maria einige Murmeln. Dann gab sie Hans 2 Murmeln. Jetzt hat Maria 6 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte sie am Anfang?	38%
3. Vergleichsaufgaben	
3.1 Differenzmenge unbekannt	
3.1.1 Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans mehr als Maria?	28%
3.1.2 Maria hat 6 Murmeln. Hans hat 2 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans weniger als Maria?	32%
3.2 Vergleichsmenge unbekannt	
3.2.1 Maria hat 3 Murmeln. Hans hat 4 Murmeln mehr als Maria. Wie viele Murmeln hat Hans?	53%
3.2.2 Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 3 Murmeln weniger als Maria. Wie viele Murmeln hat Hans?	58%
3.3 Referenzmenge unbekannt	
3.3.1 Maria hat 9 Murmeln. Sie hat 4 Murmeln mehr als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?	22%
3.3.2 Maria hat 4 Murmeln. Sie hat 3 Murmeln weniger als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?	16%
4. Angleichungsaufgaben	
4.1 Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln muß Maria noch bekommen, damit sie genauso viele Murmeln hat wie Hans?	96%
4.2 Maria hat 6 Murmeln. Hans hat 2 Murmeln. Wie viele Murmeln muß Maria abgeben, damit sie genauso viele Murmeln hat wie Hans?	96%

Abb. 1: Sechzehn Prototypen von Textaufgaben

Kontextgeschichte erklären, die die Interpretation der Differenzmenge als eine konkrete, zu beschaffende Menge nahelegt. Die Geschichte veranlaßt die Kinder dazu, den o.g. Satz in „Peter muß noch 3 Murmeln bekommen, damit er genauso viele hat wie Hans“ zu transformieren.
Bereits Vorschulkinder verfügen über das zum Lösen von Angleichungs-, Kombinations- und Austauschaufgaben benötigte mathematische Verständnis, wonach mit Zahlen konkrete Mengen bezeichnet werden und Addition und Subtraktion Mengenveränderungen beschreiben. Auf der Grundlage dieser intuitiven Mathematik, die – wie zahlreiche Untersuchungen belegen – dem Menschen weitgehend angeboren ist, wurden im Zuge der kulturellen Entwicklung mathematische Inhalte wie Bruchrechnung und Algebra erarbeitet, die ein Individuum nur unter Lernbedingungen, wie sie etwa die Schule bietet, erwerben kann. Weder Bruchzahlen noch Algebragleichungen können verstanden wer-

den, wenn Zahlen lediglich als Instrumente zum Zählen und Rechenzeichen als Aufforderung zur Durchführung von Operationen aufgefaßt werden.

Vergleichsaufgaben zur Erweiterung des mathematischen Verständnisses

Für die Schwierigkeiten der Kinder beim Lösen von Vergleichsaufgaben kann ein eingeschränktes mathematisches Verständnis verantwortlich gemacht werden. Es stellt sich also die Frage, ob eine häufigere Behandlung von Vergleichsaufgaben im Grundschulunterricht das mathematische Verständnis erweitern kann und damit den Erwerb des Stoffes der Sekundarstufe erleichtert.

Vergleichsaufgaben basieren – sofern sie nicht in Angleichungsaufgaben transformiert werden –, auf dem erweiterten mathematischen Verständnis, wonach Zahlen nicht ausschließlich zum Zählen gebraucht werden, sondern auch zur Beschreibung von Beziehungen zwischen Mengen. In diesem Aspekt zeigen sich Parallelen zwischen der Differenzmenge bei Vergleichsaufgaben und der Bruchzahl, die ebenfalls nicht als Zählinstrument herangezogen wird, sondern auch zur Beschreibung von Beziehungen zwischen Quantitäten dient. Spätestens wenn man mit Bruchzahlen oder Dezimalzahlen konfrontiert wird, reicht es nicht länger aus, Zahlen nur als Zählinstrumente zu verstehen.

In einer Längsschnittuntersuchung haben wir tatsächlich zeigen können, daß Kinder, die in der frühen Grundschulzeit gute Leistungen im Lösen von Vergleichsaufgaben zeigten, zu Beginn der Sekundarstufe weniger Fehler im Umgang mit Bruchzahlen machten als Kinder, die schwache Leistungen im Lösen von Vergleichsaufgaben erbrachten. Dieses Ergebnis spricht dafür, daß Kinder, die bereits im Grundschulalter mit dem quantitativen Vergleich von Mengen vertraut waren, wissen, daß Zahlen nicht nur zum Zählen, sondern auch zur Beschreibung von Beziehungen zwischen Mengen herangezogen werden können.

Auch das Verständnis der inversen Beziehung zwischen Addition und Subtraktion kann durch die Bearbeitung von Vergleichsaufgaben gefördert werden. Das Wissen darum, daß man die Beziehung zwischen drei Zahlen, z.B. 2, 5, 7, in vier Gleichungen ($5 + 2 = 7$, $2 + 5 = 7$, $7 - 2 = 5$, $7 - 5 = 2$) darstellen kann, wird zur Ausführung von Rechenstrategien, zur Auflösung von Algebragleichungen und zum Verständnis von Funktionen benötigt. Im Grundschulunterricht werden zwar numerische Platzhalteraufgaben vorgegeben, um die Flexibilität im Umgang mit Gleichungen zu trainieren. Wie bei den meisten numerischen Aufgaben besteht jedoch die Gefahr, daß Kinder stereotype Strategien entwickeln und damit Aufgaben richtig lösen, ohne sie verstanden zu haben. So können Platzhalteraufgaben wie $[\,]-3=8$ gelöst werden, indem Strategien entwickelt werden wie „Wenn bei Minusaufgaben der Platzhalter vorn steht, muß ich addieren".

Die inverse Beziehung zwischen Addition und Subtraktion hat ihre Entsprechung in der Symmetrie des quantitativen Vergleiches: Die Sätze „Peter hat 3 Murmeln mehr als Hans" und „Hans hat 3 Murmeln weniger als Peter" sind bedeutungsgleich und können zur Beschreibung derselben Situation herangezogen werden. Beim quantitativen Vergleich kann die Differenzmenge in einer Additions- oder in einer Subtraktionsgleichung zur Beschreibung der Beziehung zwischen zwei Mengen herangezogen werden.

Auch Angleichungsaufgaben erlauben Flexibilität in der Beschreibung einer Situation. Die Sätze „Peter muß noch 3 Murmeln bekommen, dann hat er genauso viele Murmeln wie Hans" und „Hans muß 3 Murmeln abgeben, dann hat er genauso viele Murmeln wie Peter" beschreiben Aktionen, die zum gleichen Ziel führen. In beiden Sätzen werden aber unterschiedliche Randbedingungen angenommen. Zur Realisierung der im ersten Satz beschriebenen Aktion muß sichergestellt sein, daß zusätzliche Murmeln verfügbar sind, die Peter bekommen kann. Und im zweiten Fall muß sichergestellt sein, daß Hans bereit ist, Murmeln abzugeben. In Vergleichsaufgaben müssen derartige Einschränkungen nicht beachtet werden.

Zur Auswahl von Vergleichsaufgaben

Eine häufigere Behandlung von Vergleichsaufgaben im Grundschulalter ist wünschenswert, weil diese Aufgaben geeignet sind, die Kinder auf die mathematischen Anforderungen der Sekundarstufe vorzubereiten. Zu beachten ist jedoch, daß Vergleichsaufgaben anfällig sind für Schlüsselwortstrategien: wenn das Wort „mehr" vorkommt, wird addiert und wenn das Wort „weniger" vorkommt, wird subtrahiert. Für drei der sechs Vergleichsaufgaben aus der Abb. 1 (3.1.2, 3.2.1, 3.2.2) lassen sich mit Hilfe der Schlüsselwortstrategie die richtigen Antwortzahlen finden, auch wenn die Aufgabe nicht verstanden wurde. Bei den anderen drei Aufgabentypen hingegen muß man subtrahieren, wenn das Wort „mehr" vorkommt und bei dem Wort „weniger" addieren. Diese Aufgaben können also nur gelöst werden, wenn sie auch verstanden werden.

Zu beachten bleibt schließlich auch, daß Vergleichsaufgaben in Angleichungsaufgaben transformiert werden können. Die Differenzmenge wird dann als eine konkrete Menge von zu beschaffenden oder zu entfernenden Gegenständen verstanden, ohne daß ein erweitertes Verständnis von Zahlen und mathematischen Operationen aufgebaut wird. In einer Untersuchung an Zweit- und Drittkläßlern konnten wir zeigen, daß hingegen die Vorgabe von komplexeren Aufgaben, also Aufgaben, in denen mehrere Rechenschritte auszuführen waren, eine Transformation in Angleichungsaufgaben verhindert. Komplexe Textaufgaben können aus mehreren Differenzmengen bestehen:

Hans hat 5 Murmeln.
Er hat 3 Murmeln weniger als Susanne.
Susanne hat 4 Murmeln weniger als Peter.
Wie viele Murmeln hat Peter?

Eine andere Möglichkeit besteht darin, Vergleichs- und Kombinationsaufgaben zu kombinieren:

Hans hat 5 Murmeln.
Er hat 3 Murmeln mehr als Peter.
Wie viele Murmeln haben Hans und Peter zusammen?

Die Ergebnisse unserer Untersuchungen sprechen dafür, daß insbesondere komplexe Vergleichsaufgaben zur Erweiterung des mathematischen Verständnisses herangezogen werden können.

Im Mathematikunterricht sollte mehr Zeit auf die Bearbeitung von Textaufgaben verwendet werden. Bei der Auswahl der Aufgaben ist jedoch zu beachten, daß nicht – wie bisher – überwiegend Aufgaben zum Austausch, der Kombination und der Angleichung von Mengen vorgegeben werden. Diese Aufgaben knüpfen an das intuitive mathematische Verständnis der Kinder an, ohne es in dem beschriebenen Sinne zu erweitern. Vergleichsaufgaben hingegen verdeutlichen, daß Zahlen und mathematische Operationen wie Addition und Subtraktion nicht allein zur Beschreibung von konkreten Mengen und deren Veränderung herangezogen werden können, sondern auch zur Beschreibung von Beziehungen zwischen Mengen. Auch die Flexibilität in der Beschreibung von Beziehungen zwischen Mengen kann durch die Behandlung von Vergleichsaufgaben gefördert werden.

Unsere Untersuchungen zeigen, daß Kinder bereits am Ende der ersten Klasse in der Lage sind, einfache Vergleichsaufgaben zur Addition und Subtraktion zu verstehen. Wir haben zudem zeigen können, daß auch leistungsschwächere Kinder in der ersten Hälfte der zweiten Klasse große Fortschritte im Verstehen komplexer Vergleichsaufgaben machen können, wenn sie entsprechend trainiert werden. Die Vorgabe einfacher Vergleichsaufgaben am Ende der ersten Klasse und komplexer Aufgaben mit Beginn der zweiten Klasse wäre somit wünschenswert. ●

Literatur

Stern, E.: Warum werden Kapitalsaufgaben gelöst? In: Der Mathematikunterricht 1992, 7–29.

Stern, E.: Wie viele Kinder bekommen keinen Mohrenkopf? In: Zeitschrift für Entwicklungs- und pädagogische Psychologie 1993, 34–43.

* Ich danke den Lehrerinnen *Anke Haller, Susanne Körber, Dagmar Pfeil* und *Anne Weinert* für ihre hilfreichen Anmerkungen