Mh. Math. 98, 29–40 (1984)

Monatshefte für
Mathematik

Analyse Harmonique sur les groupes de Heisenberg généralisés

Par

Marc Burger, Lausanne

(Reçu le 16 décembre 1983; revisé 4 mai 1984)

Abstract. Harmonic Analysis on Generalized Heisenberg Groups. Let $G = (X_1, X_2, X_3)_B$ be the generalized Heisenberg group as defined in Commen. Math. Helv. 1974 by H. Reiter. Under some natural conditions on G involving not the separability, we classify the unitary irreducible representations of G, and prove a Fourier inversion formula.

Les groupes de Heisenberg généralisés, apparaissant sous une forme plus particulière chez A. Weil [6], ont été introduits par H. Reiter qui a déterminé les idéaux maximaux de leur algèbre de groupe. Nous nous proposons ici d'exposer certains résultats d'analyse harmonique élementaire concernant ce type de groupe, à savoir:

— la classification sous des hypothèses raisonnables des représentations continues irréductibles unitaires

— la formule d'inversion de Fourier; dans le cas séparable, celle-ci a été effectuée par G. Mackey [2]

— la détermination d'un espace de fonctions φ sur G pour lesquelles $\int \pi(x)\varphi(x)\,dx$ est un opérateur de Hilbert—Schmidt pour toute représentation continue unitaire irréductible π de G. Rappelons à ce propos qu'un tel espace de fonctions a été déterminé par Baggett [1] pour les groupes de Lie nilpotents.

Les notations et définitions utilisées ici seront les suivantes:

a) Soient X_1, X_2, X_3 trois groupes localement compacts abéliens et $B: X_1 \times X_2 \to X_3$ une application continue $\mathbb{Z}$-bilinéaire. Le groupe de Heisenberg généralisé noté $G = (X_1, X_2, X_3)_B$ est l'espace topologique $X_1 \times X_2 \times X_3$ muni de la loi de groupe

$$(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + B(x_1, y_2)) .$$

b) Le groupe localement compact abélien $X_1 \times X_2 \times X_3$ sera noté $\tilde{G}$.

c) Soit $\chi \in \hat{X}_3$ un caractère continu de X_3, la fonction $\chi \cdot B$ est un bicaractère de $X_1 \times X_2$; $\sigma_\chi : X_1 \to \hat{X}_2$ est le morphisme canonique associé, $\sigma_\chi^* : X_2 \to \hat{X}_1$ est le morphisme dual de σ_χ. On a: $\operatorname{Im} \sigma_\chi^{*\perp} = \operatorname{Ker} \sigma_\chi$, donc $\operatorname{Ker} \sigma_\chi^\perp = (\operatorname{Im} \sigma_\chi^*)^-$, la barre désignant l'adhérence dans $\hat{X}_1$. De même $\operatorname{Im} \sigma_\chi^\perp = \operatorname{Ker} \sigma_\chi^*$ et $\operatorname{Ker} \sigma_\chi^{*\perp} = (\operatorname{Im} \sigma_\chi)^-$. Si $\sigma_\chi : X_1 \to \operatorname{Im} \sigma_\chi$ est un morphisme strict il en est de même pour $\sigma_\chi^* : X_2 \to \operatorname{Im} \sigma_\chi^*$ et on a les isomorphismes de groupes topologiques: $\dot{\sigma}_\chi^* : X_2/\operatorname{Ker} \sigma_\chi^* \to \operatorname{Im} \sigma_\chi^*$; $\dot{\sigma}_\chi : X_1/\operatorname{Ker} \sigma_\chi \to \operatorname{Im} \sigma_\chi$, $p_\chi : (\operatorname{Ker} \sigma_\chi)\hat{} \to \hat{X}_1/\operatorname{Im} \sigma_\chi^*$, $q_\chi : (\operatorname{Ker} \sigma_\chi^*)\hat{} \to \hat{X}_2/\operatorname{Im} \sigma_\chi$. En particulier $\operatorname{Im} \sigma_\chi$ et $\operatorname{Im} \sigma_\chi^*$ sont des sous-groupes fermés resp. de $\hat{X}_2$ et $\hat{X}_1$.

d) $C(H)$ désigne l'espace des fonctions continues sur un espace topologique H et $C_{\mathfrak{K}}(H)$ celles qui sont à support compact. Si H est localement compact abélien $A(H)$ est l'algèbre de Fourier de H.

e) Pour le choix des mesures de Haar, nous renvoyons le lecteur aux notations préliminaires au théorème 2.

L'idée essentielle dans la démonstration de la classification des représentations de G se trouve dans l'article de A. WEIL [6] et nous y renvoyons le lecteur intéressé.

Théorème 1. *Soit* $G = (X_1, X_2, X_3)_B$ *le groupe de Heisenberg généralisé. Soit* $\chi \in \hat{X}_3$ *tel que l'homomorphisme* $\sigma_\chi : X_1 \to \operatorname{Im} \sigma_\chi$ *soit strict. Sous ces hypothèses les assertions suivantes sont vérifiées:*

(i) *Soient* $\alpha \in (\operatorname{Ker} \sigma_\chi)\hat{}$, $\beta \in (\operatorname{Ker} \sigma_\chi^*)\hat{}$, $\chi_1 \in p_\chi(\alpha)$, $\chi_2 \in q_\chi(\beta)$ *et* $\omega = \chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi$ *le caractère du sous-groupe fermé*

$$B_\chi = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in \operatorname{Ker} \sigma_\chi, x_2 \in X_2, x_3 \in X_3\}.$$

La représentation unitaire continue induite par ω *de* B_χ *à* G *notée* $\pi_{\chi_1, \chi_2, \chi}$ *est irréductible.*

(ii) *Soit* λ *une représentation continue unitaire de* G *telle qu'il existe* $\alpha \in (\operatorname{Ker} \sigma_\chi)\hat{}$, $\beta \in (\operatorname{Ker} \sigma_\chi^*)\hat{}$ *avec* $\lambda(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1)\beta(x_2)\chi(x_3)\operatorname{Id}_V$ *où* $x_1 \in \operatorname{Ker} \sigma_\chi, x_2 \in \operatorname{Ker} \sigma_\chi^*, x_3 \in X_3$ *et* V *l'espace de* λ, *alors* λ *est équivalente à un multiple de la représentation* $\pi_{\chi_1, \chi_2, \chi}$ *où* $\chi_1 \in p_\chi(\alpha)$, $\chi_2 \in q_\chi(\beta)$.

Corollaire. *Avec les notations du théorème 1, supposons que pour tout* $\chi \in \hat{X}_3$ *le morphisme* $\sigma_\chi : X_1 \to \operatorname{Im} \sigma_\chi$ *soit strict, alors pour toute représentation continue unitaire irréductible de G, il existe* χ_1, χ_2, χ *comme dans le théorème 1* (i) *tel que* λ *soit équivalente à* $\pi_{\chi_1, \chi_2, \chi}$. *De plus, la classe d'équivalence unitaire de* $\pi_{\chi_1, \chi_2, \chi}$ *ne dépend que de la classe modulo* $\operatorname{Im} \sigma_\chi^*$, *resp.* $\operatorname{Im} \sigma_\chi$ *de* χ_1 *resp.* χ_2.

Démonstration. Au vu du théorème 1, il suffit de montrer que pour toute représentation unitaire continue irréductible de G, il existe $\chi \in \hat{X}_3$, $\alpha \in (\operatorname{Ker} \sigma_\chi)\hat{}$, $\beta \in (\operatorname{Ker} \sigma_\chi^*)$ tels que $\lambda(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1)\beta(x_2)\chi(x_3)\operatorname{Id}_V$, ce qui découle du fait que les opérateurs $\pi(x_1, x_2, x_3)$, $x_1 \in \operatorname{Ker} \sigma_\chi$, $x_2 \in \operatorname{Ker} \sigma_\chi^*$, $x_3 \in X_3$ commutent à $\lambda(G)$. □

Démonstration du théorème. i) Pour la commodité de l'écriture nous poserons $X_1/\operatorname{Ker} \sigma_\chi := X_{1,\chi}$, $X_2/\operatorname{Ker} \sigma_\chi^* := X_{2,\chi}$, $\pi := \pi_{\chi_1, \chi_2, \chi}$. La représentation π peut se réaliser dans le complété $\mathfrak{H}$ de l'espace

$$\mathfrak{E} = \{f \in C(X_1) \mid f(x_1 + x_1') = X_1(x_1')^{-1} f(x_1),$$
$$x_1 \in X_1,\ x_1' \in \operatorname{Ker} \sigma_\chi,\ |f| \in C_{\mathfrak{K}}(X_{1,\chi})\}$$

pour la norme $\|f\|^2 := \int_{X_{1,\chi}} dx_1 |f(x_1)|^2$, $f \in \mathfrak{E}$.

$$\pi(x_1, x_2, x_3) f(y) = \chi_2(x_2)\chi(x_3)\chi(B(y, x_2))^{-1} f(-x_1 + y)$$

où $y \in X_1$, $(x_1, x_2, x_3) \in G$ et $f \in \mathfrak{H}$. *

Soit $\mathfrak{F}$ l'espace des fonctions φ sur G à valeurs complexes telles que

a) φ est continue.

b) $\varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3) = \chi_1(y_1)^{-1}\chi_2(y_2)^{-1}\chi(x_3)^{-1}\varphi(x_1, x_2, 0)$ où $x_1 \in X_1$, $y_1 \in \operatorname{Ker} \sigma_\chi$, $x_2 \in X_2$, $y_2 \in \operatorname{Ker} \sigma_\chi^*$, $x_3 \in X_3$.

c) L'application $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \to |\varphi(x_1, x_2, 0)|$ est à support compact sur $X_{1,\chi} \times X_{2,\chi}$.

On munit $\mathfrak{F}$ de la norme $\|\varphi\|^2 := \int_{X_{1,\chi}} dx_1 \int_{X_{2,\chi}} dx_2 |\varphi(x_1, x_2, 0)|^2$ et on note $\mathfrak{Y}$ le complété de $\mathfrak{F}$ par rapport à cette norme.

Pour $\varphi \in \mathfrak{F}$, $f \in \mathfrak{E}$, l'expression

$$\tilde{\pi}(\varphi) f(y) := \int_{X_{1,\chi}} d\dot{x}_1 \int_{X_{2,\chi}} d\dot{x}_2\, \varphi(x_1, x_2, 0)\, \pi(x_1, x_2, 0) f(y)$$

$$:= \int_{X_{1,\chi}} d\dot{x}_1\, K_\varphi(y, x_1) f(x_1)$$

où $K_\varphi(y, x_1) = \int_{X_{2,\chi}} d\dot{x}_2\, \varphi(-x_1 + y, x_2, 0)\chi_2(x_2)\chi(B(y, x_2))^{-1}$ a un sens et définit un opérateur linéaire de $\mathfrak{E}$.

* L'application $f \to f\chi_1^{-1}$ réalise la représentation π dans $L^2(X_1, \chi)$. Son irréductibilité est montrée dans [5] 4.3.

Si on suppose $\operatorname{Im}\sigma_\chi$ muni d'une mesure de Haar telle que l'isomorphisme $\sigma_\chi : X_{1,\chi} \to \operatorname{Im}\sigma_\chi$ soit de module 1, un calcul simple montre que

$$\|\varphi\|^2 = \int_{X_{1,\chi}} d\dot{y} \int_{X_{1,\chi}} d\dot{x}\, |K_\varphi(y,x)|^2 .$$

Donc l'application $\tilde{\pi}$ s'étend en une isométrie de $\mathfrak{Y} \to HS(\mathfrak{H})$, espace des opérateurs de Hilbert—Schmidt de $\mathfrak{H}$. La surjectivité de $\tilde{\pi}$ découle du lemme suivant.

Lemme 1. *Soient* $\varphi, \psi \in C(X_1)$ *avec* $\varphi(x+x') = \chi_1(x')\varphi(x)$, $\psi(x+x') = \chi_1(x')^{-1}\psi(x)$, $x' \in \operatorname{Ker}\sigma_\chi$, $x \in X_1$ *avec* $\varphi\chi_1^{-1}$ *et* $\psi\chi_1$ *dans* $C_{\mathfrak{R}}(X_{1,\chi}) \cap A(X_{1,\chi})$. *Posons*

$$\Phi(x_1,x_2,x_3) := \chi_2(x_2)^{-1}\chi(x_3)^{-1} \int_{X_{1,\chi}} d\dot{y}\, \Phi(-x_1+y)\psi(y)\chi(B(y,x_2)) .$$

Alors

a) $\Phi \in \mathfrak{Y}$,

b) *pour tout* $x_1 \in X_1$ $\int_{X_{2,\chi}} d\dot{x}_2 |\Phi(x_1,x_2,0)| < \infty$,

c) *l'application* $\dot{x}_1 \to \int_{X_{2,\chi}} d\dot{x}_2\, |\Phi(x_1,x_2,0)|$ *est continue à support compact sur* $X_{1,\chi}$,

d) Φ *est continue sur* G,

e) $K_\Phi(y,x) = \varphi(x)\psi(y)$.

Par suite, $|K_\Phi| \in L^2(X_{1,\chi} \times X_{2,\chi})$ *et* $\tilde{\pi}(\Phi)$ *est un opérateur de Hilbert—Schmidt de* $\mathfrak{H}$ *de noyau* K_Φ.

Au vu du lemme, la surjectivité de $\tilde{\pi}$ est immédiate.

a) découle de

$$\Phi(x_1,x_2,x_3)\chi_1(x_1)\chi_2(x_2)\chi(x_3) = (\varphi'_{-\dot{x}_1}\psi')\hat{}\,(-\sigma_\chi^*(\dot{x}_2))$$

où $\varphi' = \varphi\chi_1^{-1}$, $\psi' = \psi\chi_1$ et $\hat{}$ désigne la transformation de Fourier par rapport au groupe $X_{1,\chi}$ et $\varphi'_{-x_1}(\dot{y}) = \varphi'(\dot{y} - \dot{x}_1)$.

b) $\int_{X_{2,\chi}} d\dot{x}_2\, |\varphi(x_1,x_2,0)| = \int_{\operatorname{Im}\sigma_\psi^*} dw\, |(\varphi'_{-\dot{x}_1})\hat{}*(\psi')\hat{}(w)| \leqslant \|\varphi'\hat{}\|_1\, \|\psi'\hat{}\|_1$

c) $|\Phi(x_1,x_2,0)| = |[\psi'\sigma_\chi^*(\dot{x}_2) * \varphi'\check{}](\dot{x}_1)|$ où $\varphi'\check{}(\dot{x}) = \varphi'(-\dot{x})$. Posons $F(\dot{x}_1) = \int_{X_{2,\chi}} d\dot{x}_2 |\Phi(x_1,x_2,0)|$. Ainsi, si $\dot{x}_1 \notin \operatorname{supp}\psi' + \operatorname{supp}\varphi'\check{}$, $F(\dot{x}_1) = 0$. Reste à vérifier la continuité de F:

$$|F(\dot{x}_1) - F(\dot{x}_1')| \leqslant \int_{\operatorname{Im}\sigma_\chi^*} dw\,|[(\varphi'_{-\dot{x}_1})\hat{} - (\varphi'_{-\dot{x}_1'})\hat{}] * \psi'(w)|$$
$$\leqslant \|\varphi'_{-\dot{x}_1} - \varphi'_{-\dot{x}_1'}\|_1 \, \|\psi'\|_1 \,.$$

d) est clair.

e) De ce qui précède, il découle que l'expression

$$K_\Phi(y,x) = \int_{X_{2,\chi}} d\dot{x}_2\, \chi_1(-x+y)^{-1} (\varphi'_{\dot{x}-\dot{y}}\psi')\hat{}\,(-\dot{\sigma}^*(\dot{x}_2))\,\dot{\sigma}_\chi^*(\dot{x}_2)(\dot{y})^{-1}$$

a un sens pour tout x, y dans X_1 et vaut:

$$\chi_1(-x+y)^{-1}(\varphi'_{\dot{x}-\dot{y}}\psi')(\dot{y}) = \varphi(x)\,\psi(y).$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. Dès lors, il est clair que π est irréductible, car tout opérateur commutant à $\pi(g)$, $g \in G$ commutera à $\tilde{\pi}(\varphi)$ pour $\Phi \in \mathfrak{Y}$, c'est-à-dire aux opérateurs de Hilbert—Schmidt de $\mathfrak{H}$, et sera donc scalaire.

(ii) Soit $\mathfrak{D}$ l'espace des fonctions de $\mathfrak{Y}$ qui sont continues et dont la valeur absolue est une fonction dans $L^1(X_{1,\chi} \times X_{2,\chi})$. Pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{D}$ on pose:

$$\varphi_1 * \varphi_2(x_1, x_2, x_3) := \chi(x_3)^{-1} \int_{X_{1,\chi}} d\dot{y}_1 \int_{X_{2,\chi}} d\dot{y}_2\, \varphi_1(x_1+y_1, x_2+y_2, 0)\,\cdot$$
$$\cdot\, \varphi_2(-y_1, -y_2, 0)\, \chi \circ B(x_1+y_1, y_2)^{-1}\,.$$

Avec les notations du théorème 1 ii) soit λ une représentation de G satisfaisant aux conditions du théorème 1 ii), pour $v \in V_\lambda$ et $\varphi \in \mathfrak{D}$ on pose:

$$\tilde{\lambda}(\varphi)\,v = \int_{X_{1,\chi}} d\dot{x}_1 \int_{X_{2,\chi}} d\dot{x}_2\, \varphi(x_1, x_2, 0)\, \lambda(x_1, x_2, 0)\, v\,.$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées:

a) $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{F}$, $\varphi_1 * \varphi_2 \in \mathfrak{F}$.

b) Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{D}$, alors $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \to |\varphi_1 * \varphi_2(x_1, x_2, 0)|$ est dans $L^1(X_{1,\chi} \times X_{2,\chi})$.

c) Pour $\varphi \in \mathfrak{D}$, $\tilde{\lambda}(\varphi)$ définit un opérateur borné de V_λ, au vu de b) $\tilde{\lambda}(\varphi_1 * \varphi_2)$ definit un opérateur borné de V_λ pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{D}$ et on a: $\tilde{\lambda}(\varphi_1 * \varphi_2) = \tilde{\lambda}(\varphi_1)\,\tilde{\lambda}(\varphi_2)$, $\tilde{\lambda}({}_g\varphi) = \lambda(g)\,\tilde{\lambda}(\varphi)$; $\tilde{\lambda}(\varphi^*) = \tilde{\lambda}(\varphi)^*$ où ${}_g\varphi(h) = \varphi(g^{-1}h)$ et $\varphi^*(g) = \overline{\varphi(g^{-1})}$.

d) Si π est la représentation $\pi_{\chi_1,\chi_2,\chi}$ considérée sous i) on a pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{F}$: $\|\varphi_1 * \varphi_2\| = \|\tilde{\pi}(\varphi_1)\tilde{\pi}(\varphi_2)\|_{HS} \leqslant \|\varphi_1\| \, \|\varphi_2\|$, ce qui montre que $\mathfrak{Y}$ muni de $(\varphi_1, \varphi_2) \to \varphi_1 * \varphi_2$ et $\varphi \to \varphi^*$ est une algèbre de Banach involutive isomorphe à $HS(\mathfrak{H})$. On remarquera également que $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{D}$ sont des sous-algèbres denses de $\mathfrak{Y}$.

Soit λ satisfaisant aux hypothèses du théorème 1 ii). Le lemme suivant nous permettra de construire un entrelacement entre λ et un multiple de π.

Lemme 2. *Soit $\psi \in \mathfrak{E}$, $\psi\chi_1 \in A(X_{1,\chi})$ et $\|\psi\| = 1$. Soit P la projection orthogonale $\mathfrak{H}$ sur $\mathbb{C}\psi$. Il existe alors $\varphi \in \mathfrak{D}$ tel que $\tilde{\pi}(\varphi) = P$ de plus $\varphi * \varphi = \varphi$; $\varphi = \varphi^*$ et $\varphi *_g \varphi = \langle \pi(g)\psi, \psi\rangle \varphi$ où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire sur $\mathfrak{H}$. L'adhérence de l'espace engendré par les vecteurs de la forme $\lambda(x_1, x_2, x_3)\tilde{\lambda}(\varphi)v$, $v \in V_\lambda$, $(x_1, x_2, x_3) \in G$ est V_λ.*

Démonstration. Pour $f \in \mathfrak{H}$,

$$Pf(y) = \int_{X_{1,\chi}} d\dot{x}\, K(y,x) f(x) \quad \text{où} \quad K(y,x) = \overline{\psi(x)}\,\psi(y).$$

En vertu du lemme 1, il existe $\varphi \in \mathfrak{D}$ avec $\tilde{\pi}(\varphi) = P$. Le lemme découle alors du fait que P est une projection orthogonale dont l'image est de dimension 1. En ce qui concerne la seconde assertion, soient w, $v \in V$, $g = (y_1, y_2, 0) \in G$, alors

$$\langle \lambda(g)\tilde{\lambda}(\varphi)\lambda(g^{-1})v, w\rangle =$$

$$= \int_{X_{1,\chi}} d\dot{x}_1 \int_{X_{2,\chi}} d\dot{x}_2\, \varphi(x_1, x_2, 0)\langle \lambda(x_1, x_2, 0)v, w\rangle \sigma_\chi(y_1)(y_2)\sigma_\chi^*(y_2)(x_1),$$

ce qui montre que si W est orthogonal à l'adhérence de l'espace en question l'injectivité de la transformation de Fourier et la continuité de φ permettent de conclure l'existence de $\xi_1 \in X_1$, $\xi_2 \in X_2$ avec $(\lambda(\xi_1, \xi_2, 0)v, w) = 0$ pour tout $v \in V_\lambda$. Par suite $w = 0$ ce qui achève la démonstration du lemme 2. □

Soit $V_1 = \operatorname{Im}\tilde{\lambda}(\varphi)$ avec ψ, φ comme dans le lemme 2. Vu l'irréductibilité de π il est clair que l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{i=1}^{N} \pi(g_i)\psi \otimes \tilde{\lambda}(\varphi)v_i$, $v_i \in V_\lambda$, $g_i \in G$ est dense dans $\mathfrak{H} \hat{\otimes} V_1$. De plus, un calcul facile montre que:

$$\Big\|\sum_{i=1}^{N} \pi(g_i)\psi \otimes \tilde{\lambda}(\varphi)v_i\Big\|_\sim^2 = \Big\|\sum_{i=1}^{N} \lambda(g_i)\tilde{\lambda}(\varphi)v_i\Big\|_\lambda^2$$

où $\| \ \|_\sim$ désigne la norme sur $\mathfrak{H} \otimes V_1$ et $\| \ \|_\lambda$ la norme de V_λ. On pose

$$T\Big(\sum_{i=1}^{N} \pi(g_i)\,\psi \otimes \tilde{\lambda}(\varphi)\,v_i\Big) = \sum_{i=1}^{N} \lambda(g_i)\,\tilde{\lambda}(\varphi)\,v_i\,.$$

T s'étend en une isométrie de $\mathfrak{H} \otimes V_1 \to V_\lambda$ d'image dense d'après le lemme 2. Donc T est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, de plus il est clair que T entrelace $\pi \otimes i_{V_1}$ avec λ, où i_{V_1} désigne la représentation identité de G dans V_1. □

Exemples. 1) Soit K un corps topologique localement compact non discret, χ_0 un caractère non trivial du groupe additif de K, $X_1 = \mathbb{M}_{n,r}(K)$, $X_2 = \mathbb{M}_{r,p}(K)$, $X_3 = \mathbb{M}_{n,p}(K)$, pour $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ on pose $B(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Rappelons que tout élément $\chi \in \hat{X}_3$ s'écrit $\chi(x_3) = \chi_0 \operatorname{Tr}(x_2 y)$ où $y \in \mathbb{M}_{p,n}(K)$. Alors $\sigma_\chi^*(x_2) = x_2 y$ si on identifie $\hat{X}_1$ à $\mathbb{M}_{r,n}(K)$. En particulier on voit que la condition du corollaire au théorème 1 est satisfaite. On obtient ainsi toutes les représentations de $G = (X_1, X_2, X_3)_B$.

2) Soit K un corps de nombres et K_A l'anneau des adèles de K. Soit $X_1 = X_2 = X_3 = K_A$ et $B(x_1, x_2) = x_1 x_2$ le produit usuel dans K_A. Alors, si χ_1 est un caractère non trivial de K_A on sait que K_A est topologiquement isomorphe à $\hat{K}_A$ par: $x \to \chi_x \in \hat{K}_A$, $\chi_x(y) = \chi_1(xy)$. On vérifie alors facilement que pour $x \in K_A$, $\sigma_{\chi_x}(y) = xy$ et que la condition du théorème 1 est satisfaite si et seulement si pour presque toute place v de K on a $|x_v|_v = 1$,

3) $X_1 = G$, $X_2 = \hat{G}$, $X_3 = \pi = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et $B(x, x^*) = x^*(x)$. On peut alors déterminer toutes les représentations unitaires de caractère central $\chi_n(z) = z^n$ pour autant que l'application $\sigma_n : x \to nx$ de $G \to G$ soit stricte de $G \to n \cdot G$. Supposons que cette condition soit satisfaite, soit B_n le groupe des automorphismes de $(X_1, X_2, X_3)_B$ induisant l'identité sur le sous-groupe $\operatorname{Ker}\sigma_n \times \operatorname{Ker}\sigma_n^* \times \pi$. La classe d'équivalence unitaire d'une représentation irréductible λ de caractère central χ_n sera donc déterminée par sa restriction à $\operatorname{Ker}\sigma_n \times \operatorname{Ker}\sigma_n^* \times \pi$. Donc $\lambda \circ S$ est équivalente à λ pour tout $S \in B_n$, i.e. $\lambda \circ S(x) = T_S \lambda(x) T_S^{-1}$ pour un T_S opérateur unitaire de l'espace de π. Le lecteur intéressé pourra comparer avec A. Weil [6] théorème 1.

Quelques notations:

a) $\pi_{\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2, \chi}$ est la représentation considérée au théorème 1 i), $\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2$ désignant les classes modulo $\operatorname{Im}\sigma_\chi^*$, resp. $\operatorname{Im}\sigma_\chi$ de χ_1, resp. χ_2.

b) dx_1 est une mesure de Haar sur X_1, dx_1^* la mesure duale sur $\hat{X}_1$, de même pour dx_2 sur X_2, dx_2^* sur $\hat{X}_2$. $\operatorname{Ker}\sigma_\chi$ est muni de $d\xi_1$, $\operatorname{Ker}\sigma_\chi^*$ de $d\xi_2$, $X_1/\operatorname{Ker}\sigma_\chi$ de $d\dot{x}_1$, $X_2/\operatorname{Ker}\sigma_\chi^*$ de $d\dot{x}_2$ telles que $dx_1 = d\dot{x}_1\, d\xi_1$, $dx_2 = d\dot{x}_2\, d\xi_2$. Comme les duaux respectifs de $X_1/\operatorname{Ker}\sigma_\chi$, $X_2/\operatorname{Ker}\sigma_\chi^*$ sont $\operatorname{Im}\sigma_\chi^*$, $\operatorname{Im}\sigma_\chi$ on munira ces deux groupes de dw_1^*, resp. dw_2^* mesures duales de $d\dot{x}_1$, resp. $d\dot{x}_2$. Enfin, on munira $X_1/\operatorname{Im}\sigma_\chi^*$ et $X_2/\operatorname{Im}\sigma_\chi$ de $d\chi_1$, $d\chi_2$ telles que $dx_1^* = d\chi_1\, dw_1^*$, $dx_2^* = d\chi_2\, dw_2^*$. $|\dot{\sigma}_\chi|$ désignera le module de l'isomorphisme $\dot{\sigma}_\chi : X_1/\operatorname{Ker}\sigma_\chi \to \operatorname{Im}\sigma_\chi$.

c) Soit H un groupe localement compact abélien.

$$A(H) = \{f_1 + f_2 \mid f_1 \in C_{\mathfrak{R}}(H) \cap A(H), \hat{f}_2 \in C_{\mathfrak{R}}(\hat{H}) \cap A(\hat{H})\}.$$

Comme nous allons faire un large usage de la formule de Poisson, nous renvoyons le lecteur à H. REITER [4] chap. 5 § 5.

Théorème 2. *Soit G le groupe de Heisenberg généralisé. On suppose que pour tout $\chi \in \hat{X}_3$ le morphisme $\sigma_\chi : X_1 \to \operatorname{Im}\sigma_\chi$ est strict.*

i) *Soit $\chi_1 \in \hat{X}_1$, $\chi_2 \in \hat{X}_2$, $\varphi \in A(\hat{G})$. On a*

$$\pi_{\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2, \chi}(\varphi) f(y) = \int_{X_1/\operatorname{Ker}\sigma_\chi} d\dot{x}_1 f(x_1)\, K_{\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2, \chi}(x_1, y)$$

où $K_{\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2, \chi}$ est continue sur $X_1 \times X_1$, et sa restriction à $\{(x_1, x_1) \mid x_1 \in X_1\}$ est dans $A\ (X_1/\operatorname{Ker}_{\sigma_\chi})$. Soit $\operatorname{Tr}\pi_{\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2, \chi}(\varphi)$ l'intégrale de cette fonction sur $X_1/\operatorname{Ker}\sigma_\chi$, on a:

$$\operatorname{Tr}\pi_{\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2, \chi}(\varphi) = |\dot{\sigma}_\chi|^{-1} \int_{\operatorname{Im}\sigma_\chi^*} dw_1^* \int_{\operatorname{Im}\sigma_\chi} dw_2^* \hat{\varphi}(w_1^* - \chi_1, w_2^* - \chi_2, -\chi)$$

$\hat{}$ désignant la transformation de Fourier par rapport au groupe $\tilde{G}$.

ii) *Formule d'inversion de Fourier:*

$$\varphi(0,0,0) = \int_{\hat{X}_3} d\chi\, |\dot{\sigma}_\chi| \int_{\hat{X}_1/\operatorname{Im}\sigma_\chi^*} d\chi_1 \int_{\hat{X}_2/\operatorname{Im}\sigma_\chi} d\chi_2 \operatorname{Tr}\pi_{-\dot{\chi}_1, -\dot{\chi}_2, -\chi}(\varphi).$$

Démonstration. i) Un calcul simple montre que:

$$K(x,y) = K_{\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2, \chi}(x,y) =$$

$$= \int_{\operatorname{Ker}\sigma_\chi} d\xi_1 \int_{X_2} dx_2 \int_{X_3} dx_3\, \varphi(-x+y+\xi_1, x_2, x_3)\, \chi_1(\xi_1)\, \chi_2(x_2)\, \chi(x_3)\, \overline{\sigma_\chi(y)(x_2)}.$$

Si $\varphi \in C_{\mathfrak{R}}(G) \cap A(\tilde{G})$ la continuité de K est immédiate, si $\varphi \in C_{\mathfrak{R}}(\tilde{G}\hat{})$ et $\varphi \in L^1(G)$ une application de la formule de Poisson montre que:

$$K(x_1, y_1) = \chi_1(x_1 - y_1) \int_{\operatorname{Im}\sigma_\chi^*} dw_1^*\, w_1^*(y_1 - x_1)\, \hat{\varphi}(w_1^* - \chi_1, -\chi_2 + \sigma_\chi(y_1), -\chi).$$

Comme $\hat{\varphi}$ est à support compact, on est ramené au problème précédent. En reprenant la deuxième expression pour K et en posant $x_1 = y_1 = x$, on voit que:

$$\int_{X_1/\mathrm{Ker}\,\sigma_\chi} |K(x,x)|\,d\dot{x} \leqslant |\dot{\sigma}_\chi|^{-1} \int_{\mathrm{Im}\,\sigma_\chi} dw_2^* \int_{\mathrm{Im}\,\sigma_\chi^*} dw_1^* |\hat{\varphi}(w_1^* - \chi_1, w_2^* - \chi_2, -\chi)|\,.$$

Or $\hat{\varphi} \in A(\tilde{G}\hat{\ })$, donc $\gamma(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \hat{\varphi}(x_1^* - \chi_1, x_2^* - \chi_2, -\chi)$ a la même propriété et en vertu de la formule de Poisson la restriction de γ à tout sous-groupe fermé H de $\tilde{G}\hat{\ }$ est encore intégrable. Donc $K(x,x)$ est dans $L^1(X_1/\mathrm{Ker}\,\sigma_\chi)$.

On a donc:

$$\mathrm{Tr}\,\pi_{\dot{\chi}_1,\dot{\chi}_2,\chi}(\varphi) = |\dot{\sigma}_\chi|^{-1} \int_{\mathrm{Im}\,\sigma_\chi^*} dw_1^* \int_{\mathrm{Im}\,\sigma_\chi} dw_2^* \hat{\varphi}(w_1^* - \chi_1, w_2^* - \chi_2, \chi)\,,$$

ce qui montre i).

ii) $$|\dot{\sigma}_\chi| \int_{\hat{X}_1/\mathrm{Im}\,\sigma_\chi^*} d\chi_1 \int_{\hat{X}_1/\mathrm{Im}\,\sigma_\chi} d\chi_2\,\mathrm{Tr}\,\pi_{-\dot{\chi}_1,-\dot{\chi}_2,-\chi}(\varphi) =$$
$$= \int_{\hat{X}_1} dx_1^* \int_{\hat{X}_2} dx_2^*\,\hat{\varphi}(x_1^*, x_2^*, \chi)\,.$$

Le résultat découle immédiatement de l'inversion de Fourier de $\tilde{G}$. □

La formule d'inversion de Fourier énoncée sous les conditions ci-dessus aurait peu d'intérêt si on ne pouvait l'appliquer à des fonctions du type ${}_g\varphi$ (${}_g\varphi(h) = \varphi(g^{-1}h), g, h \in G$), $\varphi \in A(\tilde{G})$. Il faut donc vérifier que $A(\tilde{G})$ est invariant par les translations de G:

1. $\|{}_g\varphi\|_{A(\tilde{G})} = \|\varphi\|_{A(\tilde{G})}$ pour $\varphi \in A(\tilde{G})$

2. $\varphi \in L^1(G)$ et $\hat{\varphi} \in C_{\mathfrak{K}}(\tilde{G}\hat{\ })$ alors il en est de même pour ${}_g\varphi$. Ce sont là des vérifications faciles laissées aux soins du lecteur.

Théorème 3. *Soit $\chi \in \hat{X}_3$ tel que le morphisme $\sigma_\chi: X_1 \to \mathrm{Im}\,\sigma_\chi$ est strict. Pour tout $\varphi \in A(\tilde{G})$, $\chi_1 \in \hat{X}_1$, $\chi_2 \in \hat{X}_2$, $\pi_{\chi_1,\chi_2,\chi}(\varphi)$ est un opérateur de Hilbert—Schmidt et on a:*

$$\|\pi_{\chi_1,\chi_2,\chi}(\varphi)\|_{HS}^2 = |\dot{\sigma}_\chi|^{-1} \int_{\mathrm{Im}\,\sigma_\chi^*} dw_1^* \int_{\mathrm{Im}\,\sigma_\chi} dw_2^* |\hat{\varphi}(w_1^* - \chi_1, w_2^* - \chi_2, -\chi)|^2\,.$$

Démonstration. Soit K le noyau de $\pi(\varphi)$. On a:

$$K(-x_1 + y_1, y_1) = (F_{x_1})\hat{\ }(\sigma_\chi(y_1))$$

où $\hat{\ }$ désigne la transformation de Fourier par rapport au groupe $X_2/\mathrm{Ker}\,\sigma_\chi^*$ et:

$F_{x_1}(\dot{x}_2) =$

$$\int_{\mathrm{Ker}\,\sigma_\chi} d\xi_1 \int_{\mathrm{Ker}\,\sigma_\chi^*} d\xi_2 \int_{X_3} dx_3\, \chi_1(\xi_1)\chi_2(x_2+\xi_2)\chi(x_3)\varphi(x_1+\xi_1, x_2+\xi_2, x_3) =$$

$$= \overline{\chi_1(x_1)} \int_{\mathrm{Im}\,\sigma_\chi} dw_2^* w_2^*(\dot{x}_2) \int_{\mathrm{Im}\,\sigma_\chi^*} dw_1^*\, w_1^*(\dot{x}_1)\hat{\varphi}(w_1^* - \chi_1, w_2^* - \chi_2, -\chi)$$

si $\varphi \in C_{\mathfrak{R}}(G)$ et $\hat{\varphi} \in L^1(\tilde{G}\hat{\ })$, la première égalité montre que $F_{x_1} \in C_{\mathfrak{R}}(X_2/\mathrm{Ker}\,\sigma_\chi^*)$ donc dans $L^2(X_2/\mathrm{Ker}\,\sigma_\chi^*)$. Si $\varphi \in C_{\mathfrak{R}}(\tilde{G}\hat{\ })$, l'application $w_2^* \to \int_{\mathrm{Im}\,\sigma_\chi^*} dw_1^*\, w_1^*(x_1)\hat{\varphi}(w_1^* - \chi_1, w_2^* - \chi_2, -\chi)$ est continue à support compact sur $\mathrm{Im}\,\sigma_\chi$ ce qui montre que $F_{x_1} \in L^2(X_2/\mathrm{Ker}\,\sigma_\chi^*)$. Dans les deux cas $\hat{F_{x_1}} \in L^2\,\mathrm{Im}\,\sigma_\chi)$ et on a:

$$\int_{X_1/\mathrm{Ker}\,\sigma_\chi} d\dot{y}_1 |K(-x_1+y_1, y_1)|^2 = |\dot{\sigma}_\chi|^{-1} \int_{X_2/\mathrm{Ker}\,\sigma_\chi^*} d\dot{x}_2 |F_{x_1}(\dot{x}_2)|^2,$$

mais $F_{x_1}(\dot{x}_2) = \overline{\chi_1(x_1)\hat{g}(-\dot{x}_1, -\dot{x}_2)}$ où $g(w_1^*, w_2^*) = \hat{\varphi}(w_1^* - \chi_1, w_2^* - \chi_2, -\chi)$ et $\hat{\ }$ est la transformation de Fourier par rapport au groupe $\mathrm{Im}\,\sigma_\chi \times \mathrm{Im}\,\sigma_\chi^*$. On remarquera que si $\varphi \in \Lambda(\tilde{G})$, g est intégrable et bornée sur $\mathrm{Im}\,\sigma_\chi \times \mathrm{Im}\,\sigma_\chi^*$, donc $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \to |F_{x_1}(\dot{x}_2)|$ est dans $L^2(\mathrm{Im}\,\sigma_\chi \times \mathrm{Im}\,\sigma_\chi^*)$,

$$\|\pi_{\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2, \chi}(\varphi)\|_{HS}^2 = \int_{X_1/\mathrm{Ker}\,\sigma_\chi} d\dot{x}_1 \int_{X_1/\mathrm{Ker}\,\sigma_\chi} d\dot{y}_1 |K(-x_1+y_1, y_1)|^2 =$$

$$= |\dot{\sigma}_\chi|^{-1} \int_{\mathrm{Im}\,\sigma_\chi^*} dw_1^* \int_{\mathrm{Im}\,\sigma_\chi} dw_2^* |\hat{\varphi}(w_1^* - \chi_1, w_2^* - \chi_2, -\chi)|^2. \ \square$$

Soit H un groupe localement compact et $K \subset H$ un compact d'intérieur non vide. Soit $L(x)f(y) = f(x^{-1}y)$ pour $f \in \mathbb{C}^H$ et $x, y \in H$.

$$W^2(H) = \{f = \sum_{n=1}^{\infty} L(y_n)f_n \,|\, \mathrm{supp} f_n \subset K, f_n \in L^2(H), \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 < \infty\}$$

$\|f\|_{W^2} = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2$, l'infinimum étant pris sur toutes les décompositions de f du type ci-dessus. On rappelle que deux compacts K_1, K_2 d'intérieur non vides donnent lieu à des normes équivalentes et que $W^2(H)$ muni de l'une de ces normes est une algèbre de Ségal.

Corollaire. *Soit K un compact de $G = (X_1, X_2, X_3)_B$, d'intérieur non vide, $\| \ \|_{W^2(\tilde{G})}$ désigne la norme sur $W^2(\tilde{G})$ construite à partir de K. Soit $\chi \in \hat{X}_3$ tel que $\sigma_\chi : X_1 \to \mathrm{Im}\,\sigma_\chi$ soit strict. Alors pour toute représentation continue unitaire irréductible de G telle que $\pi(0,0,x_3) = \chi(x_3)\mathrm{Id}_{V_\pi}$, il* *existe une constante* $C_{K,\chi} > 0$ *telle que pour tout* $\varphi \in W^2(\tilde{G})$:

$$\|\pi(\varphi)\|_{HS} \leqslant C_{K,\chi} \|\varphi\|_{W^2(\tilde{G})}.$$

Démonstration. Les translations du groupe $\tilde{G}$ seront notées $L_x : L_x f(y) = f(x+y)$. On a vu que pour $\varphi \in C_{\mathfrak{K}}(G) \cap A(\tilde{G})$

$$\|\pi_{\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2, \chi}(\varphi)\|_{HS}^2 = |\dot{\sigma}_\chi|^{-1} \int_{\operatorname{Im}\sigma_\chi^*} dw_1^* \int_{\operatorname{Im}\sigma_\chi} dw_2^* (\varphi' * \varphi'^*)^\wedge (w_1^*, w_2^*, 0)$$

où $\varphi' = (\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi) \cdot \varphi$, $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(-x)}$, et $*$ désigne la convolution sur le groupe $\tilde{G}$. Mais on sait (H. Reiter [2] chap. 5 § 5) que pour tout compact K_0 de $\tilde{G}$ il existe $C = C_{K_0,\chi} > 0$ tel que

$$\int_{\operatorname{Im}\sigma_\chi^*} dw_1^* \int_{\operatorname{Im}\sigma_\chi} dw_2^* (\varphi' * \varphi'^*)^\wedge (w_1^*, w_2^*, 0) \leqslant$$
$$\leqslant C \int_{\tilde{G}^\wedge} dg^* (\varphi' * \varphi'^*)^\wedge (g^*) = C \|\varphi\|_2^2$$

chaque fois que $\operatorname{supp}(\varphi' * \varphi'^*) \subset K_0$, ce qui a lieu si $\operatorname{supp}\varphi - \operatorname{supp}\varphi \subset K_0$. On étend cette inégalité par densité aux fonctions φ de carré intégrable telles que $\operatorname{supp}\varphi - \operatorname{supp}\varphi \subset K_0$. Mais pour de telles fonctions on a également $\operatorname{supp} L_x\varphi - \operatorname{supp} L_x\varphi \subset K_0$ pour tout $x \in G$. L'inégalité est encore valable pour $L_x\varphi$, $x \in G$.

Soit alors K un compact avec $K - K = K_0$, $\varphi \in W^2(\tilde{G})$, $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2$. D'après ce qui précède

$$\|\pi(\varphi)\|_{HS} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|\pi(L_{x_n} f_n)\|_{HS} \leqslant C_{K_0,\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2$$

en prenant l'infinimum sur toutes les décompositions de φ de ce type, on obtient l'inégalité annoncée. □

Commentaire. 1) Il est facile de voir que les idéaux maximaux de $L^1(G)$ sont exactement les idéaux de la forme

$$I_{\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2, \chi} = \{f \in L^1(G) \mid \hat{f}(w_1^* - \chi_1, w_2^* - \chi_2, -\chi) = 0 \quad \text{pour}$$
$$w_1^* \in \operatorname{Im}\sigma_\chi^*, w_2^* \in \operatorname{Im}\sigma_\chi\}$$

(cf. H. Reiter [3]). Le théorème 3 montre alors que les idéaux maximaux de $L^1(G)$ sont exactement les noyaux des représentations irréductibles unitaires de G.

2) Le théorème 3 découle d'un résultat de Pytlik [3], lemme 8.

Bibliographie

[1] BAGGETT, L.: Operators arising from representations of nilpotent Lie groups. J. Funct. Anal. **24**, 379—396 (1977).

[2] MACKEY, G. W.: Unitary representations of group extensions I. Acta Math. **99**, 265—311 (1958).

[3] PYTLIK, M.: L^1-harmonic analysis on semi direct products of abelian groups. Mh. Math. **93**, 309—328 (1982).

[4] REITER, H.: Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups. Oxford: Clarendon Press. 1968.

[5] REITER, H.: Über den Satz von Wiener und lokalkompakte Gruppen. Commen. Math. Helv. **49**, 333—364 (1974).

[6] WEIL, A.: Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. Acta Math. **111**, 143—211 (1964).

M. BURGER
Institut de mathématiques
Faculté des sciences
Université de Lausanne
CH-1015 Lausanne-Dorigny, Suisse