Invent. math. 116, 1–25 (1994)

Inventiones mathematicae

Réseaux arithmétiques et commensurateur d'après G.A. Margulis

Norbert A'Campo[1] **et Marc Burger**[2]

[1] Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel, Switzerland
[2] Institut de Mathématique, UNIL, CH-1015 Lausanne, Switzerland

Oblatum 5-I-1993

En hommage à Armand Borel avec notre admiration

Introduction

Un réseau dans un groupe de Lie semisimple G est un sous-groupe discret Γ tel que l'espace homogène $\Gamma\backslash G$ est de volume G-invariant fini. Le théorème de A. Borel et Harish-Chandra [Bor-H.C] affirme que pour un groupe algébrique H, semisimple, défini sur $\mathbf{Q}$, le sous-groupe $H_{\mathbf{Z}}$ des points à coordonnées entières de H est un réseau dans le groupe $H_{\mathbf{R}}$ des points à coordonnées réelles. Ce résultat est à la base de la notion de réseau arithmétique.

Définition. Un réseau Γ d'un groupe de Lie semisimple et connexe G est dit *arithmétique*, lorsqu'il existe un $\mathbf{Q}$-groupe semisimple H et un homomorphisme continu, surjectif et propre $p: H_{\mathbf{R}} \to G$, tel que les sous-groupes $p(H_{\mathbf{Z}})$ et Γ de G soient commensurables.

Le couple (p, H) introduit dans la définition précédente est appelé une présentation arithmétique du réseau Γ de G. Deux sous-groupes A et B d'un groupe C sont commensurables si l'intersection $A \cap B$ est d'indice fini dans A et B.

Le théorème d'Arithméticité de Margulis [Mar1, 2, 3] affirme que dans un groupe de Lie, connexe, semisimple, adjoint, sans facteurs compacts et de rang réel au moins 2, tout réseau irréductible (cf. 6.2) est arithmétique. D'après Corlette, Gromov et Schoen [Cor, Sch] tout réseau dans $Sp(n, 1)$ ou $F_{4(-20)}$ est arithmétique, alors que dans $PO(n, 1)$, $PU(2, 1)$ et $PU(3, 1)$ il y a des réseaux non arithmétiques [Gro-PS, Mos4, Del-Mos].

Dans ce travail on se propose de donner une preuve d'un critère, dû à Margulis, qui caractérise les réseaux arithmétiques en terme d'un invariant associé à l'inclusion de Γ dans G. Cet invariant est le commensurateur de Γ dans G:

$$\mathrm{Comm}_G\,\Gamma := \{g \in G : \Gamma \text{ et } g\Gamma g^{-1} \text{ sont commensurables}\},$$

qui est un sous-groupe de G contenant Γ.

Théorème. (Critère d'arithméticité) [Mar3] *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, adjoint et sans facteurs compacts. Un réseau Γ dans G est arithmétique si et seulement si, le sous-groupe* $\mathrm{Comm}_G\,\Gamma$ *est dense dans G.*

Lorsque Γ est un réseau irréductible de G, on a la formulation équivalente du critère d'arithméticité: $\Gamma\backslash\mathrm{Comm}_G\,\Gamma$ est infini $\Leftrightarrow \Gamma$ est arithmétique dans G.

La preuve de l'implication «$\mathrm{Comm}_G\,\Gamma$ dense dans $G \Rightarrow \Gamma$ est arithmétique dans G», repose sur le théorème de superrigidité, qui essentiellement classifie les représentations linéaires à image non bornée de $\mathrm{Comm}_G\,\Gamma$.

Théorème. (Superrigidité) [Mar3] *Soit G un groupe localement compact, unimodulaire, métrisable et dénombrable à l'infini. Soient Δ un sous-groupe discret dans G, et Λ un sous-groupe de G tel que $\Delta \subset \Lambda \subset \mathrm{Comm}_G\,\Delta$, satisfaisant aux deux hypothèses suivantes:*

H_1: *Il existe un sous-groupe fermé moyennable P de G, tel que les restrictions aux sous-groupes d'indice fini dans Δ de l'action diagonale de Δ sur $G/P \times G/P$ soient ergodiques.*
H_2: *Le groupe Λ est dense dans G.*

Soit H un k-groupe connexe, presque simple sur un corps local k de caractéristique zéro. Tout homomorphisme $\pi\colon \Lambda \to H_k$ à image Zariski dense, tel que $\pi(\Delta)$ n'est pas relativement compact dans H_k, s'étend en un homomorphisme continu $\pi\colon G \to H_k/Z(H)_k$.

Soit Γ un réseau irréductible dans un groupe de Lie, connexe, semisimple, adjoint et sans facteurs compacts G, soit Λ un sous-groupe de $\mathrm{Comm}_G\,\Gamma$ avec $\Gamma \subset \Lambda$, et pour un $\mathbf{C}$-groupe linéaire H, soit $\mathrm{Rep}_{\Gamma-ZD}(\Lambda, H)$ l'ensemble des homomorphismes $\Lambda \to H$ tels que l'image de Γ est Zariski dense dans H. Lorsque Λ est dense dans G, le théorème de superrigidité permet la construction canonique d'une présentation arithmétique de Γ:

Théorème. (a) *Il existe, à isomorphisme près, un seul groupe $\mathbf{C}$-simple, connexe et adjoint H, tel que* $\mathrm{Rep}_{\Gamma-ZD}(\Lambda, H) \neq \emptyset$.

(b) *Soit $\pi \in \mathrm{Rep}_{\Gamma-ZD}(\Lambda, H)$. Le corps des traces K_π de π est une extension finie de $\mathbf{Q}$ et il y a une bijection entre l'ensemble des orbites de* $\mathrm{Aut}(H)$ *dans* $\mathrm{Rep}_{\Gamma-ZD}(\Lambda, H)$ *et l'ensemble des inclusions de corps* $\mathrm{K}_\pi \hookrightarrow \mathbf{C}$.
(c) *Il existe une K_π-forme H_π de H et un homomorphisme surjectif, continu et propre $p\colon (\mathrm{Res}_{\mathrm{K}_\pi/\mathbf{Q}}\, H_\pi)(\mathbf{R}) \to G$, qui est une présentation arithmétique de Γ.*

La preuve du théorème du superrigidité du commensurateur occupe les pars. 3, 4, 5 et 7; au par. 2 l'hypothèse H_1 est vérifiée pour les réseaux dans les groupes de Lie semisimples, connexes, sans facteurs compacts. Au par. 6 on prouve un théorème de Bernstein-Zelevinski, dont une application est une nouvelle preuve du théorème de densité de Borel. Le par. 8 traite des variétés de représentations, et au par. 9 on prouve le critère d'arithméticité. Au par. 1 on indique un lien entre le commensurateur et les symétries de certains objets associés à Γ.

1 Quasiautomorphismes, correspondances et commensurateur

1.1 Un quasiautomorphisme d'un groupe Γ est un triple $(\Gamma_1, \Gamma_2, \varphi)$, où Γ_1, Γ_2 sont des sous-groupes d'indice fini dans Γ et $\varphi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ est un isomorphisme de groupes. On convient que deux quasiautomorphismes $(\Gamma_1, \Gamma_2, \varphi)$, $(\Gamma_1', \Gamma_2', \varphi')$ sont équivalents si les restrictions de φ et φ' à un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma_1 \cap \Gamma_1'$ coïncident. Le groupe des quasiautomorphismes, noté $Q\,\mathrm{Aut}(\Gamma)$, de

Γ est l'ensemble constitué des classes d'équivalences de quasiautomorphismes, muni du produit induit par l'opération

$$(\Gamma_1, \Gamma_2, \varphi) \times (\Gamma_1', \Gamma_2', \varphi') = (\varphi^{-1}(\Gamma_2 \cap \Gamma_1'), \varphi'(\Gamma_2 \cap \Gamma_1'), \varphi' \circ \varphi).$$

Le groupe des automorphismes intérieurs de Γ se projette sur un sous-groupe $Q\operatorname{Int}(\Gamma)$ de $Q\operatorname{Aut}(\Gamma)$.

Exemples. $Q\operatorname{Aut}(\mathbf{Z}^n) = \mathrm{GL}(n, \mathbf{Q})$ et $Q\operatorname{Aut}(SL(2, \mathbf{Z})) \cong Q\operatorname{Aut}(\mathbf{F}_n)$, où $\mathbf{F}_n$ est le groupe libre à n générateurs. On a $\operatorname{Aut}\mathbf{F}_n \subset Q\operatorname{Aut}(\mathbf{F}_n)$. Etant donné que $\operatorname{Aut}\mathbf{F}_3$ n'a pas de représentations linéaires fidèles [For-Pro], il en est de même de $Q\operatorname{Aut}(\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}))$.

Supposons que Γ est un réseau irréductible dans un groupe de Lie connexe, semisimple, adjoint et sans facteurs compacts $G \neq \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. En vertu du théorème de rigidité de Mostow [Mos2, 3], tout quasiautomorphisme $\varphi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ de Γ se prolonge de manière unique en un automorphisme A_φ du groupe de Lie G. On obtient ainsi un homomorphisme injectif A: $Q\operatorname{Aut}(\Gamma) \to \operatorname{Aut} G$, avec $A(Q\operatorname{Aut}(\Gamma)) \cap G = \operatorname{Comm}_G \Gamma$, où l'on a identifié G au sous-groupe de Aut G formé des automorphismes intérieurs de G. Donc l'image réciproque $A^{-1}(\operatorname{Comm}_G \Gamma)$ est un sous-groupe normal d'indice fini dans $Q\operatorname{Aut}(\Gamma)$, isomorphe à $\operatorname{Comm}_G \Gamma$ via A, car le groupe G est normal d'indice fini dans $\operatorname{Aut} G$. Le groupe $Q\operatorname{Aut}(\Gamma)$ ne dépend que du groupe «abstrait» Γ et le critère d'arithméticité de Margulis peut se formuler en disant que le réseau Γ est arithmétique, si et seulement si l'ensemble $Q\operatorname{Aut}(\Gamma)/Q\operatorname{Int}(\Gamma)$ est infini.

1.2 Une correspondance non ramifiée sur une variété algébrique V est une sous-variété irréductible $W \subset V \times V$ telle que les deux projections de W sur V soient des revêtements.

Soient G un groupe de Lie, semisimple, connexe, adjoint et $\Gamma \subset G$ un réseau irréductible. On suppose que l'espace symétrique X associé à G porte une structure complexe G-invariante et que Γ agit librement sur X. Il existe alors une variété quasiprojective V_Γ et un isomorphisme analytique $\Gamma \backslash X \cong (V_\Gamma)_{\mathbf{C}}$ [Bai-Bor].

Pour $g \in \operatorname{Comm}_G \Gamma$, le graphe $X_g \subset X \times X$ de la translation $x \mapsto gx$ dans X se projette sur une correspondance non ramifiée W_g de V_Γ. Un théorème de Piatetski-Shapiro et Safarevic [PS-Saf] affirme alors que l'application $g \mapsto W_g$ induit une bijection de $\Gamma \backslash \operatorname{Comm}_G \Gamma / \Gamma$ sur l'ensemble des correspondances non ramifiées sur V_Γ. Avec le critère d'arithméticité de Margulis on conclut que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) Γ est un réseau arithmétique de G.
(b) $\operatorname{Comm}_G \Gamma/\Gamma$ est infini.
(c) $\Gamma \backslash \operatorname{Comm}_G \Gamma/\Gamma$ est infini.
(d) La variété V_Γ admet une infinité de correspondances non ramifiées.

L'équivalence (a)$\Leftrightarrow$(d) est à la base du théorème de conjugaison de Kazhdan; voir [Kaz1, 2, 3], [Sav] ou [Nor-Rag].

Théorème. [Kaz1, 2, 3] *Soient Γ un réseau arithmétique de G, $\sigma \in \operatorname{Aut}\mathbf{C}$ et V_Γ^σ la variété obtenue à partir de V_Γ par le changement de base σ. Il existe un réseau arithmétique $\Gamma(\sigma) \subset G$, tel que $(V_\Gamma^\sigma)_{\mathbf{C}} \cong \Gamma(\sigma) \backslash X$.*

2 Moyennabilité, ergodicité

Dans ce paragraphe on donne des exemples de groupes satisfaisant à l'hypothèse H_1 du théorème du superrigidité du commensurateur.

2.1 *Moyennabilité*

Définition. Un groupe topologique L est dit *moyennable*, si pour toute action continue linéaire $L \times E \to E$ de L sur un espace de Fréchet E et pour toute partie convexe, non vide, compacte et L-invariante $I \subset E$, il existe un point L-fixe dans I. Un groupe L est dit moyennable, si L muni de la topologie discrète est moyennable.

La proposition suivante fournit des exemples de groupes moyennables.

Proposition 2.1 *Un groupe abélien est moyennable.*

Une extension R de groupes topologiques $\{1\} \to A \to R \to B \to \{1\}$ où A et B sont moyennables est moyennable.

Un groupe résoluble est moyennable.

Un groupe topologique compact est moyennable.

Preuve de la première assertion. Soient $A \times E \to E$ une action et $I \subset E$ comme dans la définition de la moyennabilité. Pour $T \in A$ on note E^T le sous-espace fermé des points T-fixes de E et $I^T = E^T \cap I$. Pour $y \in I$ et $n \in \mathbf{N}$ la combinaison convexe

$$C_n(y) = \frac{1}{n+1}[y + Ty + \ldots + T^n y]$$

de $y, Ty, \ldots, T^n y$ est dans I. Pour toute semi-norme $\| \ \|_\alpha$ sur E on a:

$$\| T(C_n(y)) - C_n(y) \|_\alpha \leqq \frac{2}{n+1} \max_{x \in I} \| x \|_\alpha .$$

Il en résulte que les points d'accumulation de la suite $\{C_n(y)\}_{n \in N}$ sont T-invariants. En particulier $I^T \neq \emptyset$. Comme A est abélien, il agit dans l'espace de Fréchet E^T et laisse invariant la partie compacte, convexe, non vide I^T. Le raisonnement ci-dessus montre que pour tout $S \in A$ on a $(I^T)^S = I^T \cap I^S \neq 0$, puis par récurrence que $\bigcap_{T \in F} I^T \neq \emptyset$ pour toute partie finie $F \subset A$. Comme I est compact, on a $\bigcap_{T \in A} I^T \neq \emptyset$, ce qui est la première assertion. q.e.d.

De la proposition précédente on déduit la

Proposition 2.2 *Soient G un groupe de Lie semisimple, connexe et $P \subset G$ un sous-groupe parabolique minimal. Alors le groupe topologique P est moyennable.* q.e.d.

Pour un exposé de la théorie des groupes moyennables on renvoie à [Gre], [Pie].

2.2 Ergodicité

Définition. Soient R un groupe, (X, μ) un espace mesuré muni d'une R-action ρ_X: $R \times X \to X$ mesurable, Y un espace borélien muni d'une R-action ρ_Y: $R \times Y \to Y$ borélienne et f: $X \to Y$ une application mesurable. On dit que l'application f est R-équivariante si l'ensemble $E_r := \{x \in X : \rho_Y(r) f(x) \neq f(\rho_X(r)\, x)\}$ est de mesure nulle pour tout $r \in R$, et strictement R-équivariante, si l'ensemble $E := \bigcup_{r \in R} E_r$ est de mesure nulle. Une partie A de X est R-invariante, si sa fonction caractéristique est R-invariante.

A noter que pour un groupe dénombrable R, une application R-équivariante f est strictement R-équivariante.

Définition. Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, μ une mesure de Radon positive et $R \times X \to X$ une action d'un groupe R par homéomorphismes de X. On dit que la classe de la mesure μ est *préservée par cette action* si pour tout $r \in R$ les mesures $r_* \mu$ et μ ont mêmes ensembles négligeables. On dit qu'une telle action de R sur l'espace mesuré (X, μ) est *ergodique*, si pour toute partie mesurable et R-invariante $E \subset X$, l'une des parties E ou $X \setminus E$ est négligeable pour μ.

On s'attend à ce que toute mesure de Radon μ dont la classe est R-invariante, puisse être «décomposée» en mesures ergodiques. Cela est vrai du moins lorsque μ elle même est R-invariante.

Proposition 2.3 *Soit μ une mesure de Radon R-invariante et positive sur X. Alors μ est limite dans la topologie vague de sommes de mesures de Radon positives, R-invariantes et ergodiques.*

Preuve. Soient $M_+(X))$ l'espace des mesures de Radon positives et $M_+(X)^R$ le cône convexe fermé des mesures R-invariantes dans $M_+(X)$. Il suit du théorème de Krein-Milman [Bou, II § 7 no 2 Cor. 2 et exemple] que le cône $M_+(X)^R$ est l'enveloppe fermée convexe de la réunion de ses génératrices extrémales. Soient $\alpha \in M_+(X)^R$ appartenant à une génératrice extrémale et $E \subset X$ un ensemble mesurable R-invariant. Posons $\alpha_1 = \alpha|_E, \alpha_2 = \alpha|_{X \setminus E}$. Alors $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in M_+(X)^R$. Comme α_1, α_2 ne vérifient pas de relation linéaire non triviale, on a $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$. Donc α est ergodique. q.e.d.

Les espaces (X, μ) auxquels nous nous intéressons plus particulièrement sont les variétés différentiables G-homogènes $X = G/H$, où G est un groupe de Lie connexe, H un sous-groupe fermé de G, munies de la classe d'une mesure μ de Lebesgue, qui est l'unique classe G-invariante de mesures de Radon sur X. Dans la suite de ce paragraphe nous construirons des triples (R, G, H), où R et H sont des sous-groupes fermés de G tels que l'action de R sur G/H soit ergodique. Tout d'abord on a le

Lemme 2.4 *Soient G un groupe de Lie, R et H des sous-groupes fermés de G. L'action de R sur G/H est ergodique, si et seulement si, l'action de H sur $R \setminus G$ l'est.*

Preuve. Soient ν une mesure de probabilité dans la classe de la mesure de Haar de G et p: $G \to G/H$ la projection canonique. La classe de l'image directe $\mu := p_*(\nu)$ est G-invariante. On considère l'action de $R \times H$ sur G définie par $(r, h)\, g = r^{-1} g h$.

L'application $E \mapsto p^{-1}(E)$ établit une bijection entre l'ensemble des parties mesurables R-invariantes dans G/H et l'ensemble des parties mesurables $R \times H$-invariantes dans G. Comme $\nu(p^{-1}(E)) = \mu(E)$, l'ergodicité de l'action de R sur G/H est équivalente à l'ergodicité de l'action de $R \times H$ sur G. q.e.d.

Le résultat suivant, dû à Moore [Moo] est la source d'exemples d'actions ergodiques voir aussi [Mos1].

Théorème 2.5 *Soient G un groupe de Lie semisimple, sans facteur compact, connexe et de centre fini, S un tore déployé maximal de G. Soit $t \in G$, tel que* $\mathrm{Ad}(t)$ *agit sur l'algèbre de Lie de G de facon semisimple avec au moins une valeur propre de module $\neq 1$, et soit $A = \langle t \rangle$ le sous-groupe engendré par t. Soit Γ un réseau dans G. L'action de S sur $\Gamma \backslash G$ est ergodique. Si l'on suppose en outre que le réseau est irréductible, l'action de A sur $\Gamma \backslash G$ est ergodique.*

Ce théorème est une conséquence d'une propriété des représentations uniformément bornées de G. Soient B un espace de Banach et $\pi: G \to \mathrm{GL}(B)$ un homomorphisme. On dit que π est une représentation continue, si l'application orbitale

$$G \times B \to B, \qquad (g, v) \mapsto \pi(g)\, v$$

est continue. Si, en outre, $\|\pi\| := \sup_{g \in G} \|\pi(g)\| < +\infty$, on dit que la représentation π est uniformément bornée.

Théorème 2.6 *Soient G, $t \in G$ et $A = \langle t \rangle$ comme dans l'énoncé du théorème 2.5. Soit π une représentation uniformément bornée de G dans un espace de Banach B. L'espace B^A des vecteurs A-invariants est un sous-espace G-invariant.*

Preuve. Soit $\mathrm{Lie}(G) = \mathscr{G}_- \oplus \mathscr{G}_0 \oplus \mathscr{G}_+$ la décomposition de l'algèbre de Lie de G en sous-espaces, tels que $\mathrm{Ad}(t)$ soit contractant sur $\mathscr{G}_-$, l'identité sur $\mathscr{G}_0$ et dilatant sur $\mathscr{G}_+$. On a pour $v \in B^A$ et $g = \exp X$, $X \in \mathrm{Lie}\, G$,

$$\begin{aligned} \|\pi(g)\, v - v\| &= \|\pi(g)\, \pi(t^{-n})\, v - \pi(t^{-n})\, v\| \\ &\leqq \|\pi\|\, \|\pi(t^n g t^{-n})\, v - v\| \\ &= \|\pi\|\, \|\pi(\exp \mathrm{Ad}(t^n)\, X)\, v - v\|. \end{aligned}$$

Si $X \in \mathscr{G}_-$, on a $\lim_{n \to \infty} \mathrm{Ad}(t^n)\, X = 0$; si $X \in \mathscr{G}_+$, on a $\lim_{n \to -\infty} \mathrm{Ad}(t^n)\, X = 0$. Donc on a $\pi(g)\, v = v$, si $X \in \mathscr{G}_-$ ou $X \in \mathscr{G}_+$. Par ailleurs, A commute à $\exp \mathscr{G}_0$; l'espace B^A est donc $\exp \mathscr{G}_0$ invariant. Mais $\exp \mathscr{G}_-$, $\exp \mathscr{G}_+$ et $\exp \mathscr{G}_0$ engendrent G. Donc l'espace B^A est G-invariant. q.e.d.

Preuve du théorème 2.5 Soit ρ la représentation unitaire de G dans $\mathscr{H} := L^2(\Gamma \backslash G)$ définie par $\rho(g) f(x) = f(xg)$, $f \in \mathscr{H}$. Le sous-espace $\mathscr{H}^A$ des vecteurs A-fixes est G-invariant (théorème 2.6). Le noyau de l'action de G dans $\mathscr{H}^A$ contient A. Il existe donc un sous-groupe fermé de G normal et connexe $N \supset A$ tel que N fixe tout vecteur de $\mathscr{H}^A$. En particulier tout vecteur S-invariant est G-invariant, ce qui montre que l'action de S est ergodique. Pour la deuxième assertion on a supposé que Γ est un réseau irréductible. La fonction caractéristique χ_E d'un ensemble $E \subset \Gamma \backslash G$, mesurable, A-invariant et de mesure positive, est N-invariante. Soit $p: G \to \Gamma \backslash G$ la projection canonique. Alors la fonction $\chi_{p^{-1}(E)}$ est Γ-invariante à gauche et N-invariante à droite. Comme N est normal dans G, $\chi_{p^{-1}(E)}$ est également N-invariante à gauche. La mesure $\chi_{p^{-1}(E)} dg$ est donc

ΓN invariante à gauche et par suite G-invariante à gauche car le sous-groupe ΓN est dense dans G et l'action de G par translation à gauche sur l'espace des mesures de Radon est continue pour la topologie faible. Par suite χ_E est G-invariante et le complémentaire de E dans $\Gamma \backslash G$ est de mesure nulle. q.e.d.

Corollaire 2.7 *Soit P un sous-groupe parabolique minimal de G. L'action diagonale de Γ sur $G/P \times G/P$ est ergodique.*

Preuve. Soit $S \subset P$ un tore déployé maximal et soit $x \in G$ tel que $xPx^{-1} = P^-$ soit le sous-groupe parabolique opposé à P. Alors la G-orbite de $(P, xP) \in G/P \times G/P$ est ouverte et son complémentaire est de mesure nulle. Ainsi $G/P \cap P^-$ s'identifie au G-espace $G/P \times G/P$, à un ensemble de mesure nulle près. Mais $P \cap P^- \supset S$ et Γ agit ergodiquement sur G/S, donc sur $G/P \cap P^-$, et par conséquent sur $G/P \times G/P$. q.e.d.

2.3 *Espaces Boréliens σ-séparés*

Nous utiliserons souvent l'ergodicité d'une action d'un groupe R sur un espace mesuré (X, μ) pour en déduire qu'une application mesurable R-invariante $f\colon X \to Y$ est essentiellement constante. Ce raisonnement nécessite des hypothèses sur l'espace Y.

Définition. Un espace Borélien (Y, B) est dit *σ-séparé* s'il existe un ensemble dénombrable de Boréliens séparant les points de Y.

Dans ce qui suit, X, μ et R sont comme dans la définition d'une action ergodique.

Lemme 2.8 *Soit (Y, B) un espace Borélien σ-séparé, $f\colon X \to Y$ une application mesurable R-invariante et μ une mesure R-ergodique. Alors f est essentiellement constante.*

Preuve. On remarque qu'il existe au plus un point $p \in Y$ tel que $\mu(f^{-1}(p)) > 0$, car les fibres de f sont R-invariantes, mesurables et disjointes. On va montrer qu'il existe au moins une fibre de f de mesure positive. On peut supposer que μ est de probabilité car X est dénombrable à l'infini. Soit $A = (A_n)_{n \in N}$ une suite de Boréliens séparant les points de Y. Pour $p \in Y$ on pose

$$X_p(n) = \bigcap_{1 \leqq i \leqq n,\, p \in A_i} f^{-1}(A_i).$$

Les ensembles $X_p(n)$ sont mesurables R-invariants, donc de mesure 0 ou 1. Comme A sépare les points de Y, on a $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_p(n) = f^{-1}(p)$. La suite stationnaire $n \mapsto \mu(X_p(n))$ converge vers $\mu(f^{-1}(p))$; il existe donc $n_p \in \mathbf{N}$ tel que $\mu(X_p(n_p)) = \mu(f^{-1}(p))$. L'ensemble dénombrable $\{X_p(n_p) \colon p \in Y\}$ de parties de X couvre X; il existe donc $q \in Y$ tel que $1 = \mu(X_q(n_q)) = \mu(f^{-1}(q))$. q.e.d.

En appliquant le lemme précédent à une application quotient on obtient le

Lemme 2.9 *Si l'espace Borélien quotient est σ-séparé et la mesure μ est R-ergodique, il existe une R-orbite $O \subset X$ telle que $\mu(X \backslash O) = 0$.* q.e.d.

En d'autres termes, une action ergodique qui n'admet pas d'orbite de mesure pleine a un espace Borélien quotient compliqué.

Nous terminons ce paragraphe en énonçant deux lemmes de topologie générale dont la preuve est laissée au lecteur.

Lemme 2.10 *Soient Y un espace topologique métrisable séparable, H un groupe agissant par homéomorphismes sur Y, tel que toutes les H-orbites soient localement fermées. L'espace Borélien quotient $H\backslash Y$ est σ-séparé.*

Lemme 2.11 *Soit Y un espace topologique métrisable séparable complet. Soit H un groupe localement compact, dénombrable à l'infini et agissant continûment sur Y. Les orbites de H dans Y sont localement fermées, si et seulement si pour tout point $p \in Y$ l'application orbitale $H/\mathrm{Stab}_H\, p \to H p$, $h \mapsto h p$ est un homéomorphisme.*

3 Application de Furstenberg

Soient G un groupe localement compact, unimodulaire et dénombrable à l'infini, et Δ un sous-groupe discret dans G. Soient k un corps local et $\rho\colon \Delta \to \mathrm{GL}(V_k)$ une représentation de Δ dans un k-espace vectoriel V_k de dimension finie. Alors Δ agit sur l'espace projectif $\mathbf{P}V_k$ par transformations linéaires projectives. De cette situation nous ne retiendrons que les données suivantes: l'espace $\mathbf{P}V_k$ est compact métrisable et Δ agit par homéomorphismes sur $\mathbf{P}V_k$.

Soit plus généralement X un espace compact métrisable sur lequel Δ agit par homéomorphismes. Alors Δ agit par isométries dans l'espace de Banach $C(X)$ des fonctions réelles et continues sur X, muni de la norme

$$\|f\|_{\sup} = \sup_{x \in X} |f(x)|, \qquad f \in C(X).$$

Le dual de $C(X)$ est l'espace de Banach $M(X)$ des mesures de Radon sur X, muni de la norme

$$\|\mu\|_{\text{masse}} = \sup_{0 \neq f \in C(X)} \frac{\langle f, \mu \rangle}{\|f\|_{\sup}}, \qquad \mu \in M(X).$$

L'action $\Delta \times M(X) \to M(X)$ est continue pour la topologie faible de dualité et préserve l'espace $M^1(X)$ des mesures de probabilité. Les structures Boréliennes engendrées par la topologie forte ou par la topologie faible sur $M(X)$ coïncident, car $C(X)$ est séparable. L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant, dû à Furstenberg:

Théorème 3.1 [Fur2] *Soit P un sous-groupe fermé et moyennable de G. Il existe une application $\varphi\colon G/P \to M^1(X)$ mesurable et strictement Δ-équivariante.*

Preuve. Nous considérons l'espace $F = L^1_\Delta(G, C(X))$ des classes d'applications mesurables, Δ-équivariantes $f\colon G \to C(X)$, telles que:

$$\|f\|_{\sup,1} := \int_{\Delta\backslash G} \|f(g)\|_{\sup}\, d\alpha(g) < +\infty,$$

où α est une mesure positive G-invariante sur $\Delta\backslash G$. Alors F muni de la norme $\| \|_{\sup,1}$ est un espace de Banach dont le dual est l'espace $E = L^\infty_\Delta(G, M(X))$ des classes d'applications mesurables, Δ-équivariantes $m\colon G \to M(X)$, telles que

$$\|m\|_{\text{masse},\infty} := \operatorname*{supess}_{g\in G} \|m(g)\|_{\text{masse}} < +\infty.$$

La dualité, voir [Edw, theorem 8.18.2], entre E et F est réalisée par la forme bilinéaire

$$(f,m) \in F \times E \mapsto \langle\!\langle f, m \rangle\!\rangle := \int_{\Delta\backslash G} \langle f(g), m(g) \rangle \, d\alpha(g) \in \mathbf{R}.$$

Le groupe G agit à droite sur G et donc continûment par isométries dans F. Si l'on munit E de la topologie faible de dualité avec F, l'application d'évaluation

$$F \times E_{\text{faible}} \times G \to \mathbf{R}, \qquad (f, m, g) \mapsto \langle\!\langle f, g_* m \rangle\!\rangle$$

est continue. En particulier l'action de G sur E_{faible} est continue. La partie

$$I = \{m \in E\colon m(g) \in M^1(X) \text{ pour presque tout } g \in G\}$$

est convexe et compacte dans E_{faible}. Elle est non vide, car pour $D \subset G$ domaine fondamental borélien de Δ et pour $\mu \in M^1(X)$, l'application $m(\delta g) := \pi(\delta)_* \mu$, $\delta \in \Delta$, $g \in D$, appartient à I; l'application m est borélienne, car Δ est dénombrable. La partie I est G-invariante; le groupe P étant moyennable, il existe un point $\bar\varphi \in I$, qui est P-fixe. On déduit de $\bar\varphi$ une application mesurable Δ-équivariante $\varphi\colon G/P \to M^1(X)$ strictement Δ-équivariante, car Δ est dénombrable. q.e.d.

4 Support de mesures en topologie de Zariski

4.1 Soient k un corps local de caractéristique nulle et $\mathrm{Var}_k(\mathbf{P}V)$ l'ensemble des sous-variétes algébriques définie sur k dans un espace projectif de dimension fine $\mathbf{P}V$. L'objet de ce paragraphe est de munir $\mathrm{Var}_k(\mathbf{P}V)$ d'une topologie et de montrer que l'application

$$\mathrm{Supp}_Z\colon\ M^1(\mathbf{P}V_k) \to \mathrm{Var}_k(\mathbf{P}V),$$

qui à une mesure de probabilité fait correspondre son support pour la topologie de Zariski, est Borélienne et $\mathrm{PGL}(V_k)$-équivariante. Cette application est la composée de l'application support pour la topologie habituelle

$$\mathrm{Supp}\colon\ M^1(\mathbf{P}V_k) \to P_F(\mathbf{P}V_k),$$

où $P_F(\mathbf{P}V_k)$ est l'espace des parties fermées de $\mathbf{P}V_k$ et de l'application adhérence de Zariski

$$\mathrm{Adh}_Z\colon\ P_F(\mathbf{P}V_k) \to \mathrm{Var}_k(\mathbf{P}V).$$

Nous munissons l'ensemble $P_F(\mathbf{P}V_k)$ des parties fermées de $\mathbf{P}V_k$ de la topologie dont une sous-base d'ouverts est constituée des ensembles T_U

$=\{F \in P_F(\mathbf{P}V_k) \colon F \cap U \neq \emptyset\}$, $I_U = \{F \in P_F(\mathbf{P}V_k) \colon F \subset U\}$, où $U \subset \mathbf{P}V_k$ parcourt les parties ouvertes de $\mathbf{P}V_k$. On observe que la topologie de $P_F(\mathbf{P}V_k)$ peut aussi être décrite à l'aide de la distance de Hausdorff $d_H(A, B) = \max\{d(a, B), d(b, A) \colon a \in A, b \in B\}$, $A, B \in P_F(\mathbf{P}V_k)$ où d est une distance induisant la topologie de $\mathbf{P}V_k$.

Lemme 4.1 *L'application* Supp: $M^1(\mathbf{P}V_k) \to P_F(\mathbf{P}V_k)$, *qui à une mesure de probabilité de* $\mathbf{P}V_k$ *fait correspondre son support, est Borélienne.*

Preuve. Avec une base dénombrable $(U_n)_{n \in N}$ de la topologie de $\mathbf{P}V_k$, on a pour le complémentaire $(\operatorname{Supp}\mu)^c$ du support d'une mesure de probabilité μ la formule:

$$(\operatorname{Supp}\mu)^c = \cup\{U_n \colon \mu(U_n) = 0\},$$

prouvant le lemme. q.e.d.

4.2 Nous allons munir $\operatorname{Var}_k(\mathbf{P}V)$ d'une topologie. Soit $k[V]_d$ le k-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d sur V_k. Une sous-variété $S \subset \mathbf{P}V$ définie sur k est donnée par un idéal gradué $I(S)$ dans l'anneau gradué $k[V] = \bigoplus_{d \in N} k[V]_d$ des fonctions polynomiales $V_k \to k$. On a $I(S) = \bigoplus_{d \in N} I_d(S)$, où $I_d(S) = I(S) \cap k[V]_d$.

Pour un k-espace vectoriel W_k de dimension finie, $\operatorname{Gr}(W_k)$ désigne l'espace topologique somme des Grassmanniennes $\operatorname{Gr}_\ell(W_k)$, $0 \leqq \ell \leqq \dim W_k$. Nous munissons l'ensemble $\operatorname{Var}_k(\mathbf{P}V)$ de la topologie la moins fine qui rende continues les applications

$$I_d \colon \operatorname{Var}_k(\mathbf{P}V) \to \operatorname{Gr}(k[V]_d),\ S \mapsto I_d(S).$$

Autrement dit on identifie $\operatorname{Var}_k(\mathbf{P}V)$, via l'injection

$$\operatorname{Var}_k(\mathbf{P}V) \to \prod_{d=0}^{\infty} \operatorname{Gr}(k[V]_d),\ S \mapsto (I_d(S))_{d \in N},$$

à un sous-espace topologique de l'espace compact $\prod_{d=0}^{\infty} \operatorname{Gr}(k([V]_d)$.

4.3 On observe que l'adhérence de Zariski d'une partie fermée $F \subset \mathbf{P}V_k$ s'obtient à l'aide des plongements de Plücker $\operatorname{Pl}_d \colon \mathbf{P}V_k \to \mathbf{P}k[V]_d^*$, $d \geqq 1$, avec la formule

$$\operatorname{Adh}_Z F = \bigcap_{d \geqq 1} \operatorname{Pl}_d^{-1}([\operatorname{Pl}_d(F)]_{\text{lin}}),$$

où $[A]_{\text{lin}} \subset \mathbf{P}W_k$ désigne l'enveloppe linéarie d'une partie A dans un espace projectif $\mathbf{P}W_k$.

Lemme 4.2 *Soit W_k un k-espace vectoriel de dimension finie. Les niveaux de la fonction*

$$\dim \colon P_F(\mathbf{P}W_k) \to \mathbf{N},\quad F \mapsto \dim[F]_{\text{lin}}$$

sont des parties localement fermées de $P_F(\mathbf{P}W_k)$. Pour toute valeur $\ell \in \mathbf{N}$ de la fonction dim, *la restriction de l'application*

$$[\ ]_{\text{lin}} \colon P_F(\mathbf{P}W_k) \to \operatorname{Gr}(W_k),\quad F \mapsto [F]_{\text{lin}}$$

au niveau $\dim^{-1}(\ell)$ *est continue.*

Preuve. Soient $F_1 \in P_F(\mathbf{P}W_k)$, $\ell = \dim[F_1]_{\text{lin}}$ et $x_1, \ldots, x_\ell \in F_1$ tels que $[F_1]_{\text{lin}} = [\{x_1, \ldots, x_\ell\}]_{\text{lin}}$. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour, tout $F_2 \in P_F(\mathbf{P}W_k)$, avec $d_H(F_1, F_2) < \varepsilon$, on ait $\dim[F_2]_{\text{lin}} \geqq \dim[F_1]_{\text{lin}}$. En effet, on choisit $y_1, \ldots, y_\ell \in F_2$ tels que $d(x_i, y_i) < \varepsilon$, et on ait $\dim[\{y_1, \ldots, y_\ell\}]_{\text{lin}} = \ell$, de sorte que $\dim[F_2]_{\text{lin}} \geqq \dim[F_1]_{\text{lin}}$. Donc la fonction dim est semicontinue inférieurement. Ses niveaux sont donc localement fermés. De plus, si $\dim[F_2]_{\text{lin}} = \dim[F_1]_{\text{lin}}$, on déduit du raisonnement ci-dessus que $[F_1]_{\text{lin}}$ et $[F_2]_{\text{lin}}$ sont proches, prouvant la dernière assertion. q.e.d.

Lemme 4.3 *L'application* $\mathrm{Adh}_Z\colon P_F(\mathbf{P}V_k) \to \mathrm{Var}_k(\mathbf{P}V)$ *est Borélienne.*

Preuve. Il suffit de vérifier que l'application $F \mapsto I_d(\mathrm{Adh}_Z F)$ de $P_F(\mathbf{P}V_k)$ dans $\mathrm{Gr}(k[V]_d)$ est Borélienne. Soit

$$\mathrm{Pol}\colon\ \mathrm{Gr}(k[V]_d^*) \to \mathrm{Gr}(k[V]_d)$$

l'homéomorphisme donné par la polarité. On a $I_d(\mathrm{Adh}_Z F) = \mathrm{Pol}([\mathrm{Pl}_d(F)]_{\text{lin}})$. Plus précisément, l'application $\mathrm{Pl}_d\colon \mathbf{P}V_k \to \mathbf{P}k[V]_d^*$ est un homéomorphisme sur son image et induit une application continue $\mathrm{Pl}_d\colon P_F(\mathbf{P}V_k) \to P_F(\mathbf{P}k[V]_d^*)$. Il découle par ailleurs du lemme 4.2 que l'application

$$[\ ]_{\text{lin}}\colon\ P_F(\mathbf{P}k[V]_d^*) \to \mathrm{Gr}(k[V]_d^*)$$

est Borélienne. Donc $I_d \circ \mathrm{Adh}_Z = \mathrm{Pol} \circ [\ ]_{\text{lin}} \circ \mathrm{Pl}_d$ est Borélienne. q.e.d.

Des lemmes 4.1 et 4.3 on déduit le

Corollaire 4.4 *L'application* $\mathrm{Supp}_Z\colon M^1(\mathbf{P}V_k) \to \mathrm{Var}_k(\mathbf{P}V)$ *est borélienne,* $\mathrm{PGL}(V_k)$*-équivariante.* q.e.d.

5 Application bord: Cas constant

5.1 Soient G un groupe localement compact, unimodulaire et dénombrable à l'infini, Δ un sous-groupe discret dans G, H un groupe algébrique connexe défini sur un corps local k de caractéristique nulle, presque simple sur k, et $\pi\colon \Delta \to H_k$ un homomorphisme tel que $\pi(\Delta)$ soit Zariski dense dans H. De la représentation adjointe Ad de H dans $V := \mathrm{Lie}(H)$ on déduit une représentation irréductible de H_k dans V_k. Le groupe H_k et, via π, le groupe Δ agissent par homéomorphismes sur l'espace projectif $\mathbf{P}V_k$. Soit P un sous-groupe moyennable fermé de G. Nous disposons alors de l'application de Furstenberg

$$\varphi\colon\ G/P \to M^1(\mathbf{P}V_k),$$

qui, composée avec l'application $\mathrm{Supp}_Z\colon M^1(\mathbf{P}V_k) \to \mathrm{Var}_k(\mathbf{P}V)$, donne une application mesurable strictement Δ-équivariante

$$\Phi\colon\ G/P \to \mathrm{Var}_k(\mathbf{P}V)$$

que nous appelons application bord. L'objet de ce paragraphe est de démontrer le

Théorème 5.1 *On suppose que l'action diagonale de Δ sur $G/P \times G/P$ est ergodique.*

Si l'application bord est essentiellement constante, l'image $\pi(\Delta)$ est relativement compacte dans H_k.

5.2 Pour l'action de PGL (V_k) sur l'espace des mesures de probabilités $M^1(\mathbf{P}V_k)$, on a le résultat clef de Furstenberg:

Proposition 5.2 [Fur1] *Soient $(g_n)_{n\in N}$ une suite de* $\mathrm{PGL}(V_k)$ *et $\mu\in M^1(\mathbf{P}V_k)$ telles que la suite $(g_n * \mu)_{n\in N}$ converge faiblement vers $\nu\in M^1(\mathbf{P}V_k)$. Si $(g_n)_{n\in N}$ n'est pas relativement compact dans* $\mathrm{PGL}(V_k)$, on a

$$\operatorname{Supp}\nu\subset A_k\cup B_k,\qquad \dim A+\dim B=\dim \mathbf{P}V-1,$$

où A_k et B_k sont des sous-espaces linéaires propres de $\mathbf{P}V_k$.

Preuve. Supposons que $(g_n)_{n\in N}$ n'est pas relativement compact. Quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que $\lim g_n=g$, avec $g\in\mathbf{P}\mathrm{End}(V_k)$, $g\notin\mathrm{PGL}(V_k)$, et que $\lim g_n(\operatorname{Ker} g)=: A_k\in\mathrm{Gr}(V_k)$. Soit $B_k:=\operatorname{Im} g\subset\mathbf{P}V_k$. Pour tout $\ell\in\mathbf{P}V_k\backslash\operatorname{Ker} g$, on a $\lim g_n(\ell)\in B_k$. Les points d'accumulation de la suite $(g_n(\ell))_{n\in N}$ sont dans A_k, pour tout $\ell\in\operatorname{Ker} g$. Donc, si f est une fonction continue à support dans $\mathbf{P}V_k\backslash(A_k\cup B_k)$, la suite $(f\circ g_n)$ tend vers zéro en tout point de $\mathbf{P}V_k$. Il résulte du théorème de convergence dominée que $\nu(f)=0$. q.e.d.

Voici une conséquence immédiate de la proposition 5.2.

Corollaire 5.3 *Soit $\nu\in M^1(\mathbf{P}V_k)$ une mesure dont le support n'est pas contenu dans la réunion de deux sous-espaces linéaires propres. Le stabilisateur* $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGl}(V_k)}\nu$ *de ν dans* $\mathrm{PGL}(V_k)$ *est compact.*

5.3 Supposons que l'application bord $\Phi=\mathrm{Supp}_Z\circ\varphi$ est essentiellement constante, d'image essentielle $Y\in\mathrm{Var}_k(\mathbf{P}V)$. De la Δ-équivariance de Φ on déduit que $Y\subset\mathbf{P}V$ est $\pi(\Delta)$-invariante, puis que Y est H-invariante car $\pi(\Delta)$ est Zariski dense dans H. En particulier, $Y_k\subset\mathbf{P}V_k$ est H_k-invariante. Donc φ est à valeurs dans l'espace

$$M_{ZD}(Y_k):=\{\mu\in M^1(\mathbf{P}V_k)\colon \mathrm{Supp}_Z\,\mu=Y\}.$$

Lemme 5.4 *Soient $\mu,\nu\in M_{ZD}(Y_k)$ et $(h_n)_{n\in N}$ une suite de H_k, telles que la suite $(\mathrm{Ad}(h_n)_*\,\mu)_{n\in N}$ converge vers ν. Alors la suite $(h_n)_{n\in N}$ est relativement compacte dans H_k. En particulier,*

(1) *Les H_k orbites dans $M_{ZD}(Y_k)$ sont fermées.*
(2) *Pour tout $\mu\in M_{ZD}(Y_k)$, le groupe* $\mathrm{Stab}_{H_k}\mu$ *est compact.*

Preuve. Supposons que la suite $(h_n)_{n\in N}$ n'est pas relativement compacte dans H_k, donc que la suite $(\mathrm{Ad}(h_n))_{n\in N}$ ne l'est pas dans $\mathrm{Ad}(H_k)\subset\mathrm{PGL}(V_k)$. Il existe A_k, B_k, sous-espaces linéaires propres de $\mathbf{P}V_k$ tels que $\operatorname{Supp}\nu\subset A_k\cup B_k$ et

$$(*)\qquad (\dim A+1)+(\dim B+1)=\dim\mathbf{P}V+1=\dim V.$$

On a $Y\subset A\cup B$, car $Y=\mathrm{Supp}_Z\,\nu\subset A\cup B$. L'action Ad de H_k sur V_k étant irréductible, on a $\mathbf{P}V_k=[Y_k]_{\mathrm{lin}}\subset[A_k\cup B_k]_{\mathrm{lin}}$. En particulier $\mathbf{P}V=[A\cup B]_{\mathrm{lin}}$. On déduit alors de $(*)$ que $A\cap B=\emptyset$. Donc

$$U:=\{h\in H\colon hA\cap B=\emptyset,\ A\cap hB=\emptyset\}$$

est un ouvert de Zariski non vide de H. Pour $h \in U$ on a:

$$Y = Y \cap hY \subset (A \cup B) \cap (hA \cup hB) = (A \cap hA) \cup (B \cap hB).$$

On conclut de $[Y]_{\mathrm{lin}} = \mathbf{P}V$ et de (*) que $A = hA$ et $B = hB$. Donc U est fermé. Comme H est connexe, on a $U = H$. Mais alors H_k préserve A_k, ce qui contredit l'irréductibilité de la représentation Ad de H_k dans V_k. q.e.d.

Voici une conséquence immédiate du lemme 5.4:

Corollaire 5.5 *Les orbites de l'action diagonale de H_k sur $M_{ZD}(Y_k) \times M_{ZD}(Y_k)$ sont fermées.*

Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, muni d'une mesure de Radon positive μ, Y un espace topologique et $f\colon X \to Y$ une application mesurable. Un point $y \in Y$ est dit valeur essentielle de f si pour tout voisinage V de y on a $\mu(f^{-1}(V)) > 0$. L'image essentielle de f, $\operatorname{Imess} f \subset Y$, est l'ensemble des valeurs essentielles de f. C'est une partie fermée de Y. On remarque que $\operatorname{Imess} f$ ne dépend que de la classe de la mesure μ. De plus, si $f(x) = f'(x)$ pour presque tout $x \in X$, $\operatorname{Imess} f = \operatorname{Imess} f'$. Il faut prendre garde au fait que $\operatorname{Imess} f$ peut être vide. Néanmoins, supposons qu'il existe un compact $K \subset Y$ tel que $\mu(f^{-1}(K)) > 0$. Alors $\operatorname{Imess} f \neq \emptyset$. En effet, soit ν une mesure de probabilité dans la classe de μ et soit $f_* \nu$ son image directe par f. La mesure $f_* \nu|_K$ est positive et bornée sur le compact K de sorte que l'on a $\emptyset \neq \operatorname{Supp}(f_* \nu|_K) \subset K \cap \operatorname{Imess} f$.

Preuve du théorème 5.1 On va montrer que l'image essentielle de l'application de Furstenberg $\varphi\colon G/P \to M_{ZD}(Y_k)$ est réduite à un point. Montrons d'abord qu'elle est non vide. Soit

$$p\colon\ M_{ZD}(Y_k) \to H_k \backslash M_{ZD}(Y_k)$$

la projection canonique. L'application Δ-invariante $p \circ \varphi$ est essentiellement constante (lemme 2.8). En effect, l'action de Δ sur G/P est ergodique et la structure Borélienne de $H_k \backslash M_{ZD}(Y_k)$ est σ-séparée (lemme 5.4.1 et lemme 2.10). Il existe donc une H_k-orbite $F \subset M_{ZD}(Y_k)$ telle que $\varphi(x) \in F$ pour presque tout $x \in G/P$. La F_k-orbite est réunion dénombrable de compacts. Il existe donc un compact $K \subset F$ tel que $\varphi^{-1}(K)$ soit de mesure positive. Donc $\operatorname{Imess} \varphi$ est non vide.

On considère l'application mesurable, équivariante pour les actions diagonales de Δ sur source et but,

$$\varphi \times \varphi\colon\ G/P \times G/P \to M_{ZD}(Y_k) \times M_{ZD}(Y_k),$$

et

$$q\colon\ M_{ZD}(Y_k) \times M_{ZD}(Y_k) \to H_k \backslash (M_{ZD}(Y_k) \times M_{ZD}(Y_k))$$

la projection canonique. Alors, d'après le lemme 2.8, l'application Δ-invariante $q \circ (\varphi \times \varphi)$ est essentiellement constante (corollaire 5.5, lemme 2.10). Il existe donc une H_k-orbite $O \subset M_{ZD}(Y_k) \times M_{ZD}(Y_k)$ telle que $\varphi \times \varphi(x, y) \in O$ pour presque tout $(x, y) \in G/P \times G/P$. Comme O est fermé (corollaire 5.5), on a $\operatorname{Imess} \varphi \times \operatorname{Imess} \varphi = \operatorname{Imess}(\varphi \times \varphi) \subset O$. Par conséquent, la H_k-orbite O contient un point de la diagonale $D \subset M_{ZD}(Y_k) \times M_{ZD}(Y_k)$. Donc $O \subset D$ et $\operatorname{Imess} \varphi \times \operatorname{Imess} \varphi \subset O \subset D$. Il en résulte que Imess $\varphi=\{\mu\}$, $\mu\in M_{ZD}(Y_k)$. L'application φ étant Δ-équivariante, on a $\pi(\Delta)\subset\mathrm{Stab}_{H_k}\mu$, où $\mathrm{Stab}_{H_k}\mu$ est compact (lemme 5.4.2). q.e.d.

Remarque. Dans son exposé au Colloque en l'honneur de J.L. Koszul, Grenoble 1987, M. Gromov a généralisé le corollaire 5.3, voir théorème 5.6. La formulation de Gromov nous a suggéré l'emploi du support d'une mesure pour la topologie de Zariski.

6 Actions algébriques et structures Boréliennes quotient

6.1 Soient k un corps local et V une variété algébrique définie sur k. Au moyen de cartes affines, on peut munir V_k d'une topologie d'espace localement compact métrisable. Cette topologie est parfois appelée topologie de Hausdorff pour la distinguer de la topologie de Zariski. Soit G un k-groupe agissant k-algébriquement sur V. Alors G_k agit continûment sur V_k. Concernant la nature topologique des orbites de G_k dans V_k on a le résultat suivant, dû à Bernstein et Zelevinski, dont une preuve, valable en caractéristique zéro, nous a été indiquée par Scot Adams.

Théorème 6.1 [Ber-Zel] *Soient k un corps local, V une k-variété et G un k-groupe agissant k-algébriquement sur V. Les orbites de G_k dans V_k sont localement fermées.*

Preuve en caractéristique zéro. Soient $v\in V_k$ et W l'adhérence de Zariski de Gv dans V. Alors Gv est un k-ouvert dense dans W. Soit $\varphi\colon G\to W$, $g\mapsto gv$ l'application orbitale. Par construction, l'application tangente $T_g\varphi\colon T_g G\to T_{gv}W$ est surjective pour tout $g\in G$. Soit $\mathrm{Ps}\,W$ l'ensemble des points simples de W. C'est un k-ouvert de W, non vide et G-invariant. Ainsi $Gv\cap\mathrm{Ps}\,W\neq\emptyset$ et donc $Gv\subset\mathrm{Ps}\,W$. Alors $\varphi\colon G_k\to(\mathrm{Ps}\,W)_k$ est une application submersive de variétés k-analytiques. En vertu du théorème des fonctions implicites [Ser, III § 10, 2], on a que $\varphi(G_k)=G_k v$ est un ouvert de $(\mathrm{Ps}\,W)_k$ dans la topologie de Hausdorff. Comme $\mathrm{Ps}\,W$ est un k-ouvert de W, $(\mathrm{Ps}\,W)_k$ est un ouvert de W_k. Enfin, W_k est un fermé de V_k. Donc $G_k v$ est localement fermé dans V_k. q.e.d.

6.2 Le théorème de Bernstein-Zelevinski joue un rôle essentiel dans la preuve du théorème de superrigidité. Une application immédiate en est le théorème de densité de Borel.

Théorème 6.2 [Bor1] *Soit G un $\mathbf{R}$-groupe algébrique connexe et semisimple, tel que $G_\mathbf{R}$ soit sans facteurs compacts. Soit Γ un réseau dans $G_\mathbf{R}$. Alors Γ est Zariski dense dans G.*

Preuve. Soit H l'adhérence de Zariski de Γ dans G. Alors $G_\mathbf{R}/H_\mathbf{R}$ porte une mesure $G_\mathbf{R}$-invariante finie μ. On va montrer que H contient tous les tores S de dimension 1 décomposés sur $\mathbf{R}$. Supposons au contraire qu'il existe un tel tore S tel que $S^0_\mathbf{R}\cap H_\mathbf{R}=(e)$. Une application répétée du théorème 6.1 montre que les orbites de $S^0_\mathbf{R}$ dans $G_\mathbf{R}/H_\mathbf{R}$ sont localement fermées. L'ouvert $S^0_\mathbf{R}$-invariant $Z:=\{x\in G_\mathbf{R}/H_\mathbf{R}\colon \mathrm{Stab}_{S^0_\mathbf{R}}x=e\}$ de $G_\mathbf{R}/H_\mathbf{R}$ est par hypothèse non vide, donc de mesure positive. Soit $K\subset Z$ un compact de mesure positive. Soit $\delta\in S^0_\mathbf{R}-(e)$. L'application orbitale $\mathbf{Z}\to W$, $n\mapsto\delta^n x$, est, pour tout $x\in W$, un homéomorphisme sur son image. Donc pour tout $x\in K$, l'ensemble $R(x,K)=\{n\in\mathbf{Z}\colon \delta^n x\in K\}$ est fini. Le théorème de récurrence de Poincaré [Mañ] affirme que l'ensemble formé des $x\in Z$ tel que $R(x,K)$ est infini, est de mesure positive; d'où une contradiction.

Donc H contient tout tore de G de dimension 1 décomposé sur $\mathbf{R}$. Comme $G_{\mathbf{R}}$ est sans facteurs compacts, on en déduit que $H_{\mathbf{R}} \supset G_{\mathbf{R}}$. Un argument de dimension montre que $G_{\mathbf{R}}$ est Zariski dense dans G. Donc $H = G$. q.e.d.

6.2 On mentionne deux applications du théorème de densité de Borel.

Définition. Un réseau Γ dans un groupe de Lie connexe, semisimple, sans facteur compact G est *irréductible*, si pour tout sous-groupe, non réduit à l'élément neutre, fermé, normal et connexe N de G, l'image de Γ dans G/N est dense.

Le théorème de densité de Borel permet de prouver:

Théorème 6.3 (cf [Rag]) *Soit Γ un réseau irréductible dans un groupe de* Lie *G semisimple, connexe et sans facteurs compacts. Il existe une décomposition de G en produit presque direct $G = H_1 \ldots H_r$, où $H_i \cap \Gamma$ est un réseau irréductible dans H_i et où le produit $(H_1 \cap \Gamma) \ldots (H_r \cap \Gamma)$ est d'indice fini dans Γ.*

Théorème 6.4 *Soit Γ un réseau irréductible dans un groupe de* Lie *G semisimple, connexe et sans facteurs compacts. Soit Λ un sous-groupe avec $\Gamma \subset \Lambda \subset G$. Si le quotient $\Gamma \backslash \Lambda$ est infini, le groupe Λ est dense dans G.*

6.3 Dans son exposé à Grenoble, M. Gromov a prouvé

Théorème 6.5 *Soient k un corps local de caractéristique nulle, V une k-variété et H un k-groupe agissant k-algébriquement et presque effectivement sur V. Soit $\mu \in M^1(V_k)$ une mesure de probabilité telle que* $\mathrm{Supp}_Z\, \mu = V$. *Alors le stabilisateur de μ dans H_k est un groupe compact.*

Rappelons qu'une action $H \times V \to V$ est presque effective si l'intersection des stabilisateurs des points de V est un sous-groupe fini de H.

Preuve. On a $\bigcap_{x \in V_k} \mathrm{Stab}_H\, x = \bigcap_{x \in V} \mathrm{Stab}_H\, x$ car $V_k \supset \mathrm{Supp}\, \mu$ est Zariski dense dans V. Il existe donc $x_1, \ldots, x_m \in V_k$ tel que $\bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Stab}_H\, x_i = \bigcap_{x \in V} \mathrm{Stab}_H\, x$. On considère la variété algébrique $W = V \times \ldots \times V$, m facteurs, avec l'action diagonale du groupe H et l'espace $W_k = V_k \times \ldots \times V_k$ avec la mesure de probabilité produit $\nu = \mu \times \ldots \times \mu$. Le stabilisateur du point $y = (x_1, \ldots, x_m) \in W_k$ est fini. Donc il existe un k-ouvert $U \subset W$, H-invariant, $U_k \neq \emptyset$, tel que le stabilisateur de tout point de U est fini. Soit α la restriction à U_k de la mesure ν. La mesure finie α est $S := \mathrm{Stab}_{H_k}\, \mu$ invariante et non nulle car $\mathrm{Supp}_Z\, \nu = W$. Il existe donc une mesure de probabilité S-invariante ergodique $\beta \in M^1(U_k)$ (proposition 2.3). Les orbites de S dans U_k sont localement fermées, car S est un sous-groupe fermé de H_k et l'action de H_k sur U_k est presque libre, à orbites localement fermées (théorème 6.1). Par suite, il existe une S-orbite $O \subset U_k$ avec $\beta(O) = 1$ (lemme 2.9). On déduit alors de β une mesure de Haar finie sur S, ce qui montre que S est compact. q.e.d.

Voici un corollaire immédiat au théorème 6.5:

Corollaire 6.6 *Soient V et H comme dans le théorème* 6.5. *Soit $\mu \in M^1(V_k)$. Alors il existe un sous-groupe algébrique L de H, défini sur k, tel que L_k soit un sous-groupe normal cocompact dans* $\mathrm{Stab}_{H_k}\, \mu$.

6.4 Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, ν une mesure de Radon positive sur X, W une k-variété et H un k-groupe agissant k-algébriquement sur W. Soit $F(X, W_k)$ l'espace des classes d'applications mesurables $a: X \to W_k$, muni de la topologie de la convergence en mesure sur les parties compactes. L'espace $F(X, W_k)$ est métrisable, séparable et complet [Ber]. De l'action de H_k sur W_k se déduit une action continue sur $F(X, W_k)$.

Lemme 6.7 *Pour $a\in F(X, W_k)$, le stabilisateur* $\mathrm{Stab}_{H_k} a$ *est l'ensemble des k-points d'un k-sous-groupe de H. Les orbites de H_k dans $F(X, W_k)$ sont localement fermées.*

Preuve. De l'égalité $\mathrm{Stab}_{H_k}\, a = \bigcap_{w\in \mathrm{Imess}_a} (\mathrm{Stab}_H\, w)_k$ résulte la première assertion. Pour la deuxième il suffit (lemme 2.11) de noir que pour tout $a\in F(X, W_k)$ et pour toute suite $(h_n)_{n\in N}$ dans H_k avec $\lim_{n\to\infty} h_{n*}\, a=a$, la suite $(h_n)_{n\in N}$ se projette sur une suite convergente dans $H_k/\mathrm{Stab}_{H_k} a$. On pose $E=\{x\in X\colon \lim_{n\to\infty} h_n\, a(x) =a(x)\}$ et $D=a(E)\subset W_k$, de sorte que $\nu(X\setminus E)=0$ et $\lim_{n\to\infty} h_n\, y=y$ pour tout $y\in D$. Pour $y\in \mathrm{Imess}\, a$ et pour tout voisinage V de y dans W_k, on a $\nu(a^{-1}(V))>0$. D'où $a^{-1}(V)\cap E\neq\emptyset$, $V\cap D\neq\emptyset$ et $\mathrm{Imess}\, a\subset \bar{D}$. L'application $H_k/\mathrm{Stab}_{H_k} y\to W_k$, $h\mapsto hy$ est un homéomorphisme sur son image (théorème 6.1 et lemme 2.11) et donc $(h_n)_{n\in N}$ converge dans $H_k/\mathrm{Stab}_{H_k} y$ pour tout $y\in D$. On a $\bigcap_{y\in D} \mathrm{Stab}_{H_k} y = \bigcap_{y\in \bar D} \mathrm{Stab}_{H_k} y\subset \mathrm{Stab}_{H_k} a$. Il existe $y_1, \dots, y_n\in D$ tels que $\bigcap_{i=1}^{i=n} \mathrm{Stab}_{H_k} y_i = \bigcap_{y\in\bar D} \mathrm{Stab}_{H_k} y =: L$, d'où l'identification de H_k/L à la H_k-orbite de $(e, \dots, e)$ dans $\prod_{i=1}^{i=n} H_k/\mathrm{Stab}_{H_k} y_i$ et la convergence de la suite $(h_n)_{n\in N}$ dans H_k/L, puis dans $H_k/\mathrm{Stab}_{H_k} a$. q.e.d.

7 Application bord: Cas non constant

7.1 Soient G un groupe localement compact, unimodulaire et dénombrable à l'infini, Δ un sous-groupe discret dans G, $\Lambda\subset G$ un sous-groupe, tel que $\Delta\subset\Lambda\subset \mathrm{Comm}_G(\Delta)$, H un k-groupe connexe, presque simple sur un corps local k de caractéristique zéro et $\pi\colon \Lambda\to H_k$ un homomorphisme, tel que $\pi(\Lambda)$ est Zariski-dense dans H. On suppose en outre que $\pi(\Delta)$ n'est pas relativement compact dans H_k.

On considére l'ensemble $\mathscr{F}$ formé des couples (φ, M), où M est un H_k-espace homogène et $\varphi\colon G/P\to M$ est une application mesurable vérifiant les propriétés suivantes: (a) M est de la forme H_k/L_k, où $L\subset H$ est un k-sous-groupe avec $L_k\neq H_k$. (b) Il existe $\Delta'\subset\Lambda$ commensurable à Δ tel que $\varphi\colon G/P\to M$ soit Δ'-équivariante.

L'ensemble $\mathscr{F}$ ne dépend que du sous-groupe Λ, de l'homomorphisme π et la classe de commensurabilité de Δ dans Λ.

Théorème 7.1 *L'ensemble $\mathscr{F}$ n'est pas vide. Il y a un couple $(\psi, N)\in\mathscr{F}$ satisfaisant à la propriéte universelle suivante: pour tout $(\varphi, M)\in\mathscr{F}$ il existe une application H_k-équivariante $p\colon N\to M$ qui fait commuter le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} G/P \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & N \arrow[dl, "p"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

En particulier le couple $(\psi, N)\in\mathscr{F}$ est unique à un isomorphisme de H_k-espace homogène près.

Soit ψ: $G/P\to N$, $N=H_k/L_k$, le couple universel. L'espace $N/\mathrm{Aut}_{H_k}(N)$ s'identifie à H_k/L'_k, où $L'=N_H(\mathrm{Adh}_Z L_k)$ est le normalisateur de l'adhérence de Zariski de L_k dans H. Soit q: $H_k/L_k\to H_k/L'_k$ la projection canonique. On a le

Corollaire 7.2 *L'application composée $\theta:=q\circ\psi$: $G/P\to H_k/L'_k$ est mesurable Λ-équivariante et non essentiellement constante.*

Preuve du théorème 7.1 Soit A l'adhérence de Zariski de $\pi(\Delta)$ dans H et A^0 sa composante connexe neutre qui est de dimension positive, car $\pi(\Delta)$ n'est pas fini. L'image $\pi(\Lambda)$ normalise A^0, car $\Lambda\subset\mathrm{Comm}_G\,\Delta$, et par suite A^0 est un k-sous-groupe normal de H, d'où $A=H$, ce qui signifie que $\pi(\Delta)$ est Zariski-dense dans H. L'application bord

$$\Phi\colon\ G/P\to\mathrm{Var}_k(\mathbf{P}V)$$

n'est donc pas essentiellement constante (théorème 5.1). Comme expliqué ci-dessous, on en déduit une application Δ-équivariante mesurable

$$\varphi\colon G/P\to H_k/L_k,$$

où L est un k-sous-groupe de H avec $L\neq H$, ce qui prouve $\mathscr{F}\neq\emptyset$.

On rappelle, que $\mathrm{Var}_k(\mathbf{P}V)$ s'identifie à un sous-espace de $\prod_{d=0}^{\infty}\mathrm{Gr}(k[V]_d)$. Il existe donc $d\in\mathbf{N}$ tel que la composée

$$G/P\xrightarrow{\ \Phi\ }\mathrm{Var}_k(\mathbf{P}V)\xrightarrow{\ \mathrm{pr}_d\ }\mathrm{Gr}(k[V]_d)$$

ne soit pas essentiellement constante. L'action de Δ sur G/P étant ergodique, il existe ℓ tel que pour presque tout $g\in G/P$ on a $\mathrm{pr}_d\,\Phi(g)\in\mathrm{Gr}_\ell(k[V]_d)$.

On obtient ainsi une application Δ-équivariante mesurable φ: $G/P\to\mathrm{Gr}_\ell(k[V]_d)$, dont l'image essentielle est contenue dans une H_k-orbite; en effet, l'action de Δ sur G/P est ergodique et les orbites de H_k dans $\mathrm{Gr}_\ell(k[V]_d)$ sont localement fermées (théorème 6.1). En utilisant l'application orbitale, on obtient (lemme 2.11) une application Δ-équivariante mesurable φ: $G/P\to H_k/L_k$, avec $L\neq H$, car φ n'est pas essentiellement constante.

L'ensemble $\mathscr{F}$ est muni du préordre $(\varphi_1, M_1)\geqq(\varphi_2, M_2)$ s'il existe une application H_k-équivariante p: $M_1\to M_2$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} G/P \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & M_1 \arrow[d, "p"] \\ & M_2 \end{tikzcd}$$

On note $\mathscr{F}_0$ l'ensemble ordonné quotient associé. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des H_k-espaces homogènes M de la forme H_k/L_k, où L est un k-sous-groupe de H avec $L\neq H$. L'ensemble $\mathscr{H}$ est muni du préordre $M_1\geqq M_2$ s'il existe une application H_k-équivariante $p: M_1 \to M_2$. Soit $\mathscr{H}_0$ l'ensemble ordonné quotient associé. On observe que $\mathscr{H}_0$ est l'ensemble des classes de H_k-isomorphismes de tels espaces homogènes. L'application

$$\mathrm{Oubl}\colon \mathscr{F} \to \mathscr{H}, (\varphi, M) \mapsto M$$

est monotone croissante et induit une application monotone croissante

$$\mathrm{Oubl}\colon \mathscr{F}_0 \to \mathscr{H}_0, (\varphi, M) \mapsto M.$$

Pour prouver le théorème, il suffit de voir que $\mathscr{F}_0$ a un unique élément maximal. Soit $\mathscr{C}$ une chaîne de $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{C}' = \mathrm{Oubl}(\mathscr{C})$. On observe que la restriction à $\mathscr{C}$ de l'application Oubl est injective et que la chaîne $\mathscr{C}'$ est finie, car toute suite décroissante de k-sous-groupes de H est stationnaire. Par suite $\mathscr{C}$ est finie et possède donc un élément maximal. Donc $\mathscr{F}_0$ a un élément maximal. Nous allons montrer que pour tout $a_1, a_2 \in \mathscr{F}_0$, il existe $c \in \mathscr{F}_0$ avec $c \geqq a_1$ et $c \geqq a_2$, ce qui implique que $\mathscr{F}_0$ a un unique élément maximal. Soient $(\varphi_i, M_i) \in \mathscr{F}$ un représentant de a_i et $\Delta_i \subset \Lambda$ un sous-groupe commensurable à Δ tel que φ_i soit Δ_i-équivariante, $i = 1, 2$. L'application mesurable $\varphi\colon G/P \to M_1 \times M_2$, $x \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ est $\Delta_0 := \Delta_1 \cap \Delta_2$-équivariante pour l'action diagonale de H_k sur $M_1 \times M_2$. Les orbites de H_k dans $M_1 \times M_2$ sont localement fermées et l'action de Δ_0 sur G/P est ergodique. Il existe donc une H_k-orbite $M \subset M_1 \times M_2$ telle que $\varphi(x) \in M$ pour presque tout $x \in G/P$. Ainsi $(\varphi, M) \in \mathscr{F}$ et $(\varphi, M) \geqq (\varphi_i, M_i)$, moyennant les projections de M sur M_i, $i = 1, 2$. q.e.d.

Preuve du corollaire 7.2 Pour $\lambda \in \Lambda$ et $(\varphi, M) \in \mathscr{F}$, on définit, au moyen de la formule $\lambda_* \varphi(x) := \pi(\lambda)\, \varphi(\lambda^{-1} x)$, une action de Λ sur $\mathscr{F}$ qui préserve la structure de préordre de $\mathscr{F}$. Si (ψ, N) est un élément maximal de $\mathscr{F}$, les applications $\lambda_* \psi$ et ψ diffèrent par un automorphisme H_k-équivariant de N. Donc θ est Λ-équivariante. L'application θ n'est essentiellement constante que lorsqu'on a $L = H$, car elle est Λ-équivariante et $\pi(\Lambda)$ est Zariski dense dans H. Donc si l'on suppose que θ est essentiellement constante, le groupe $\mathrm{Aut}_{H_k}(N)$ agit transitivement sur N, ce qui entraine que toutes les H_k-orbites dans $N \times N$ sont fermées. Donc, pour un $t \in \mathrm{Aut}_{H_k}(N)$ convenable, $\mathrm{Imess}(\psi \times t\psi)$ est dans la diagonale de $N \times N$ et par suite, ψ est essentiellement constante, ce qui est absurde. q.e.d.

Preuve du théorème de superrigidité. Soit $\theta\colon G/P \to W_k$, $W = H/N(L)$, l'application mesurable Λ-équivariante du corollaire 7.2. On a en particulier $\mathrm{Adh}_Z\, \mathrm{Imess}\, \theta = W$, car $\mathrm{Adh}_Z\, \mathrm{Imess}\, \theta$ est $\pi(\Lambda)$ invariante et $\pi(\Lambda)$ est Zariski dense dans H. Soit $\Theta\colon G \to F(G, W_k)$ l'application continue Λ-équivariante défine par $\Theta(g)(x) := \theta(gxP)$, $g \in G$, $x \in G$. On a $\mathrm{Adh}_Z\, \mathrm{Imess}\, \Theta(g) = \mathrm{Adh}_Z\, \mathrm{Imess}\, \theta = W$ pour tout $g \in G$. L'action du sous-groupe dense Λ sur G est ergodique et les H_k-orbites dans $F(G, W_k)$ sont localement fermées (lemme 6.7). Il existe une H_k-orbite $O \subset F(G, W_k)$ tel que $\Theta(g) \in O$ pour presque tout $g \in G$. Donc $\mathrm{Adh}_Z\, \mathrm{Imess}\, a = W$, pour tout $a \in O$, ce qui entraîne que $\mathrm{Stab}_{H_k}(a) \subset Z(H)_k$, car H_k est presque simple sur k. L'orbite O est ouverte dans son adhérence $\bar{O}$ (lemme 6.7). Le fermé $\Theta^{-1}(\bar{O})$ est Λ-invariant, non vide, donc on a $G = \Theta^{-1}(\bar{O})$. Le fermé $G \backslash \Theta^{-1}(O)$ est Λ-invariant de mesure nulle, donc vide, car Λ est dense dans G. Donc $\Theta(G) \subset O$, ce qui permet de déduire de Θ une application continue Λ-équivariante $T\colon G \to H_k/Z(H)_k$. Pour $g_1, g_2 \in G$, on définit $\Pi(g_1, g_2) \in H_k/Z(H)_k$ par

$$T(g_1 g_2)(T(e))^{-1} = T(g_1)(T(e))^{-1}\, \Pi(g_1, g_2).$$

Pour tout $\lambda\in\Lambda$ et tout $g_2\in G$, on a $\Pi(\lambda g_1, g_2)=\Pi(g_1, g_2)$, ce qui prouve que l'application $g_1\mapsto\Pi(g_1, g_2)$ est constante; soit $\Pi(g_2)$ sa valeur. On vérifie que Π est l'extension cherchée de $\pi\colon \Lambda\to H_k$. q.e.d.

8 Variété des représentations

8.1 Soient Γ un groupe de type fini, $S\subset\Gamma$ un ensemble fini de générateurs de Γ et $H\subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe algébrique linéaire, V étant un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $\mathbf{Rep}(\Gamma, H)$ l'ensemble des homomorphismes de Γ à valeurs dans H. L'application d'évaluation sur le système de générateurs $E_S\colon \mathrm{Rep}(\Gamma, H)\to H^S$ identifie l'ensemble $\mathrm{Rep}(\Gamma, H)$ à un sous-ensemble de H^S. Soit $\lambda\colon \mathbf{F}_S\to\Gamma$ l'homomorphisme de présentation du groupe Γ. Pour tout mot $m\in\mathbf{F}_S$, soit $P_m\colon H^S\to H$ l'application d'évaluation du mot m. Alors les équations $P_m(h)=e$, $h\in H^S$, $m\in\operatorname{Ker}\lambda$, forment un système d'équations pour l'image $E_S(\mathrm{Rep}(\Gamma, H))\subset H^S$, à laquelle on donne ainsi une structure de variété affine. Via l'identification E_S on obtient une telle structure sur $\mathrm{Rep}(\Gamma, H)$ qui, en outre, ne dépend pas de la présentation choisie.

On note $\mathbf{Aut}_{\mathrm{Tr}}(H)$ le groupe algébrique des automorphismes du groupe H qui préservent la trace

$$\mathrm{Tr}\colon\ H\subset\mathbf{GL}(V)\to\mathbf{C}.$$

Le groupe $\mathbf{Aut}_{\mathrm{Tr}}(H)$ agit algébriquement sur la variété $\mathrm{Rep}(\Gamma, H)$ et laisse invariante la partie $\mathbf{Rep}_{ZD}(\Gamma, H)$ formée des représentations d'image Zariski dense dans H. Pour une partie I de Γ, on considère l'application

$$\mathbf{Tr}_I\colon\ \mathbf{Rep}(\Gamma, H)\to\mathbf{C}^I, \pi\mapsto(\mathbf{Tr}\,\pi(\gamma))_{\gamma\in I}.$$

Proposition 8.1 *On suppose H réductif. Il existe une partie finie $I\subset\Gamma$ telle que:*

(a) *L'ensemble* $\mathrm{Rep}_{ZD}(\Gamma, H)$ *est une réunion de fibres de l'application* Tr_I.
(b) *Une fibre de* Tr_I *contenue dans* $\mathrm{Rep}_{ZD}(\Gamma, H)$ *est une* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Tr}}(H)$ *orbite.*

Preuve. Le graphe de la relation d'équivalence sur $\mathrm{Rep}(\Gamma, H)$, déduite de l'application Tr_Γ, est donné par un nombre fini d'équations $\mathrm{Tr}\,\pi_1(\gamma)=\mathrm{Tr}\,\pi_2(\gamma)$, $\gamma\in I$.

Soient $\pi_1\in\mathrm{Rep}(\Gamma, H)$ et $\pi_2\in\mathrm{Rep}_{ZD}(\Gamma, H)$ telles que $\mathrm{Tr}_\Gamma(\pi_1)=\mathrm{Tr}_\Gamma(\pi_2)$. Pour la deuxième projection de l'adhérence de Zariski $A:=\mathrm{Adh}_Z(\pi_1(\Gamma)\times\pi_2(\Gamma))$ dans $H\times H$, on a $p_2(A)=H$. Le sous-groupe $N:=A\cap(\{e\}\times H)$ est invariant dans A. Le morphisme

$$\mathrm{Tr}\circ p_1-\mathrm{Tr}\circ p_2\colon\ H\times H\to\mathbf{C}$$

s'annulle sur A. Donc pour tout $(e, x)\in N$, on a $\mathrm{Tr}(x^\nu)=\mathrm{Tr}(e)$, $\nu\in\mathbf{N}$, ce qui prouve que x est un élément unipotent de H. Donc, le sous-groupe $p_2(N)$, étant un sous-groupe invariant et unipotent de H, est trivial, car H est réductif. Donc, A est le graphe d'un morphisme surjectif $\alpha\colon p_1(A)\to H$, ce qui prouve $\alpha\in\mathrm{Aut}\,H$, puis $\alpha\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{Tr}}\,H$ avec $\pi_2=\alpha\circ\pi_1$, d'où les assertions (a) et (b). q.e.d.

A noter que la proposition suivante ne sera pas utilisée par la suite.

Proposition 8.2 *On suppose H semisimple connexe. La partie* $\mathrm{Rep}_{ZD}(\Gamma, H)$ *est un ouvert de Zariski dans* $\mathrm{Rep}(\Gamma, H)$.

Exemple. $\mathrm{Rep}_{ZD}(\mathbf{Z}, \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*)$, ainsi que son complémentaire, sont denses pour la topologie analytique dans $\mathrm{Rep}(\mathbf{Z}, \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*)$.

Preuve de la proposition. On prouve d'abord cette proposition pour un groupe simple H. Soit J le nombre de Jordan de H; pour un groupe fini A, soit $j(A)$ l'ordre du quotient de A par un sous-groupe résoluble normal maximal de A, le nombre de Jordan J de H est le maximum sur $j(A)$ pour les sous-groupes finis de H. Soit X la variété somme des grassmanniennes $\mathrm{Gr}_d(\mathrm{Lie}\, H)$, $0<d<\dim H$. Soit Y la variété des configurations de parties finies non vides avec au plus J éléments. La variété Y est complète et, pour l'action induite par l'action adjointe, tout sous-groupe algébrique propre A de H fixe un point dans Y. Le groupe H agit sans point fixe sur Y. On considére dans $Y \times H^S$ le fermé formé des points $(y, (h_s)_{s \in S})$ tels que $\mathrm{ad}(h_s)\, y = y$, $s \in S$, donc la projection Σ sur H^S est fermée dans H^S, car Y est une variété complète. Donc, $\mathrm{Rep}_{ZD}(\Gamma, H)$ est l'image réciproque par l'application d'évaluation E_S de l'ouvert $H^S - \Sigma$. Pour un groupe semisimple H il suffit de modifier la variété X. Soit $Z \subset X$ l'ensemble des sous-espaces contenant l'algèbre de Lie d'un facteur du groupe H, et soit X' la variété complète obtenue en éclatant les composantes irréductibles de Z dans X. Le groupe H agit sur l'espace Y' des J-configurations de X' sans point fixe, mais tout sous-groupe algébrique propre de H admet un point fixe dans Y'. q.e.d.

8.2 Soit Λ un groupe contenant le groupe Γ tel que $\mathrm{Comm}_\Lambda(\Gamma) = \Lambda$.

On note par $\mathrm{Rep}_{\Gamma-ZD}(\Lambda, H)$ l'ensemble des représentations $\Lambda \to H$ pour lesquelles l'image de Γ est Zariski dense dans H.

Proposition 8.3 *Soit Λ un groupe contenant Γ, avec $\mathrm{Comm}_\Lambda(\Gamma) = \Lambda$. On suppose que le groupe H est $\mathbf{C}$-simple et connexe. L'application restriction*

$$\mathrm{Rep}_{\Gamma-\mathrm{ZD}}(\Lambda, H) \to \mathrm{Rep}_{ZD}(\Gamma, H)$$

est injective.

Preuve. Il faut prouver qu'une représentation $\pi \in \mathrm{Rep}_{\Gamma-ZD}(\Lambda, H)$ est déterminée par sa restriction à Γ. Pour $\lambda \in \Lambda$, la valeur $\pi(\lambda)$ satisfait au système d'équations d'inconnue $x \in H$

$$(\mathrm{Ad}_H(x))\,(\pi(\lambda^{-1} \gamma \lambda)) = \pi(\gamma), \qquad \gamma \in \lambda \Gamma \lambda^{-1} \cap \Gamma.$$

Ce système a au plus une solution, car Ad_H est injectif et $\pi(\lambda \Gamma \lambda^{-1} \cap \Gamma)$ est Zariski dense dans H. q.e.d.

8.3 Le morphisme $\mathrm{Tr}_I \colon H^I \to \mathbf{C}^I$ de la proposition 8.1 est un $\mathbf{Q}$-morphisme, en particulier Aut $\mathbf{C}$-équivariant, si l'on suppose que le groupe $H \subset \mathrm{GL}(V)$ est défini sur $\mathbf{Q}$.

Lemme 8.4 *Pour $\pi \in \mathrm{Rep}_{\Gamma-ZD}(\Lambda, H)$, le corps $k_\pi := \mathbf{Q}(\mathrm{Tr}(\pi(\gamma)), \gamma \in \Lambda)$ des traces de π coïncide avec le corps $\mathbf{Q}(\mathrm{Tr}(\pi(\gamma)), \gamma \in I)$.*

Preuve. Soit σ un automorphisme de $\mathbf{C}$ qui fixe $\mathrm{Tr}\, \pi(\gamma), \gamma \in I$. Donc π et $\sigma \circ \pi$ diffèrent par un automorphisme de H qui préserve la trace (proposition 8.3 et 8.1). q.e.d.

Pour $\pi \in \mathrm{Rep}_{ZD}(\Gamma, H)$, soit $k_\pi = \mathbf{Q}(\mathrm{Tr}\,\pi(\gamma), \gamma \in I)$ le corps des traces de π et $\alpha := \mathrm{Tr}_I\,\pi \in \mathbf{C}^I$. La k_π-variété $\mathrm{Tr}_I^{-1}(\alpha)$ est donc un espace homogène principal de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Tr}}(H)$ stable pour l'action de $\mathrm{Aut}_{k_\pi}\mathbf{C}$. L'unique cocycle

$$\tau: \mathrm{Aut}_{k_\pi}\mathbf{C} \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Tr}}(H), \qquad \sigma \mapsto \tau_\sigma$$

satisfaisant à $\sigma\pi = \tau_\sigma \pi$ donne l'action tordue $\sigma_*(h) = \tau_\sigma^{-1}\sigma(h)$ de $\mathrm{Aut}_{k_\pi}\mathbf{C}$ sur H. Il existe un groupe H_π défini sur k_π et un isomorphisme $j_\pi: H \to H_\pi$ défini sur $\mathbf{C}$, qui est équivariant pour l'action tordue sur H et l'action naturelle sur H_π du groupe $\mathrm{Aut}_{k_\pi}\mathbf{C}$. En particulier $j_\pi\,\pi(\Gamma) \subset H_\pi(k_\pi)$.

Une manière de réaliser H_π est la suivante: Soient P_H l'espace vectoriel des fonctions régulières sur H à valeurs dans $\mathbf{C}$, P_Γ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbf{C}$ sur le groupe Γ et $R_\pi: P_H \to P_\Gamma$ l'application linéaire telle que $R_\pi(f)(\gamma) = f(\pi(\gamma)), f \in P_H, \gamma \in \Gamma$. L'application R_π est injective, car $\pi(\Gamma)$ est Zariski dense dans H. Soit T_H le $\mathbf{C}$-sous-espace vectoriel de P_H engendré par les translatées à droite par H de la fonction $\mathrm{Tr}: H \to \mathbf{C}$; soit T_Γ le k_π-espace vectoriel engendré par les Γ-translatées de la fonction $R_\pi(\mathrm{Tr})$ qui est à valeurs dans k_π. Les espaces T_H et T_Γ sont de dimension finie et R_π induit un isomorphisme

$$r_\pi: \; T_H \to T_\Gamma \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}.$$

Soient $\rho_H: H \to \mathrm{GL}(T_H)$ et $\rho_{\pi(\Gamma)}: \Gamma \to \mathrm{GL}(T_\Gamma)$ les représentations induites par les translations. Soit H_π l'adhérence de Zariski de $\rho_{\pi(\Gamma)}(\Gamma)$ dans $\mathrm{GL}(T_\Gamma \otimes \mathbf{C})$, qui est un k_π-groupe car T_Γ est un k_π-espace vectoriel. On remarque que r_π induit un isomorphisme de $H = \rho_H(H)$ vers H_π. Le noyau de ρ_H est trivial, car formé d'éléments unipotents.

9 Preuve du critère d'arithméticité

Soit Γ un réseau irréductible dans un groupe de Lie G semisimple, connexe, adjoint, sans facteurs compacts et soit $\mathrm{Comm}_G\,\Gamma$ le commensurateur de Γ dans G. Dans ce paragraphe on prouve l'implication (voir l'introduction): $\Gamma\backslash\mathrm{Comm}_G\,\Gamma$ est infini $\Rightarrow \Gamma$ est arithmétique, qui est le point (c) du théorème suivant:

Théorème 9.1 *Soit $\Gamma \subset G$ un réseau irréductible dans un groupe de Lie, semisimple, connexe, adjoint, san... facteur compact et soit Λ un sous-groupe tel que $\Gamma \subset \Lambda \subset \mathrm{Comm}_G\,\Gamma$ et $\Gamma\backslash\Lambda$ soit infini.*

(a) *Il existe, à isomorphisme près, un seul groupe $\mathbf{C}$-simple, connexe, adjoint H tel que*

$$\mathrm{Rep}_{\Gamma\text{-}ZD}(\Lambda, H) \neq \emptyset.$$

(b) *Soit $\pi \in \mathrm{Rep}_{\Gamma\text{-}ZD}(\Lambda, H)$. Le corps des traces K_π de π est une extension finie de $\mathbf{Q}$ et il y a une bijection entre l'ensemble des orbites de* $\mathrm{Aut}(H)$ *dans* $\mathrm{Rep}_{\Gamma\text{-}ZD}(\Lambda, H)$ *et l'ensemble des inclusions de corps $K_\pi \hookrightarrow \mathbf{C}$.*
(c) *Il existe une K_π-forme H_π de H et un homomorphisme surjectif continu et propre*

$$p: \; (\mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}}\,H_\pi)(\mathbf{R}) \to G,$$

qui est une présentation arithmétique de Γ.

Preuve du théorème 9.1 Le triple $\Gamma \subset \Lambda \subset G$ vérifie les hypothèses du théorème de superrigidité, car Λ est dense dans G (théorème 6.4). Soit H un groupe $\mathbf{C}$-simple, connexe adjoint, tel que l'ensemble $\mathrm{Rep}_{\Gamma-ZD}(\Lambda, H)$ soit non vide. On obtient un exemple d'un tel groupe H en prenant un facteur simple de $\mathbf{G}$, où $\mathbf{G}$ est le groupe algébrique des automorphismes intérieurs de l'algèbre $\mathrm{Lie}\, G$. On choisit pour $H \subset \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}\, H)$ une structure de $\mathbf{Q}$-groupe à l'aide d'une base de Chevalley. L'ensemble A des homomorphismes continus de G à valeurs dans H est, à $\mathrm{Aut}(H)$ équivalence près, fini. Pour $\gamma \in \Gamma$ et $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$, on a l'inégalité

$$|\mathrm{Tr}\, \sigma \circ \pi(\gamma)| \leqq \max\{\dim \mathrm{Lie}\, H, \max\{|\mathrm{Tr}\, a\gamma|, a \in A\}\}.$$

En effet, si $|\mathrm{Tr}\, \sigma \circ \pi(\gamma)| > \dim \mathrm{Lie}\, H$, le groupe $\sigma \circ \pi(\Gamma)$ n'est pas relativement compact dans H et la représentation $\sigma \circ \pi$ se prolonge à G d'après le théorème de superrigidité du commensurateur; donc pour un $a \in A$ on a $|\mathrm{Tr}\, \sigma \circ \pi(\gamma)| \leqq |\mathrm{Tr}\, a\gamma|$. On conclut que toute trace $\mathrm{Tr}\, \pi(\gamma)$ est un nombre algébrique.

Le groupe Γ étant de type fini [Gar-Rag, Kaz4], il existe une partie finie $I \subset \Gamma$ telle que le corps $K_\pi := \mathbf{Q}(\mathrm{Tr}(\pi(\gamma)), \gamma \in \Lambda)$ des traces de π coïncide avec le corps $\mathbf{Q}(\mathrm{Tr}(\pi(\gamma)), \gamma \in I)$, (lemme 8.4). Le corps K_π est donc une extension finie de $\mathbf{Q}$. Soit H_π le K_π-groupe et j_π: $H \to H_\pi$ l'isomorphisme décrits au 8.3 et $\rho_\pi := j_\pi \circ \pi$, de sorte que l'on a l'inclusion $\rho_\pi(\Lambda) \subset H_\pi(K_\pi)$. Soient S_f l'ensemble des places finies du corps K_π et, pour $v \in S_f$, $O_{\pi,v}$ l'anneau des entiers de $K_{\pi,v}$. Il existe un partie finie $S \subset S_f$ telle que, pour tout $v \in S_f - S$, on ait $\rho_\pi(\Gamma) \subset H_\pi(O_{\pi,v})$, car le groupe Γ est de type fini. Pour tout $v \in S$ l'image $\rho_\pi(\Gamma) \subset H_\pi(K_{\pi,v})$ est relativement compacte; sinon, le prolongement de ρ_π à G serait un homomorphisme continu et non constant du groupe connexe G vers le groupe totalement discontinu $H_\pi(K_{\pi,v})$, ce qui est absurde. Donc, le groupe $\{\gamma \in \Gamma | \rho_\pi(\gamma) \in H_\pi(O_{\pi,v}), v \in S_f\}$ est d'indice fini dans Γ, car S est fini et la projection de $\rho_\pi(\Gamma)$ dans l'espace discret $H_\pi(K_{\pi,v})/H_\pi(O_{\pi,v})$ est finie pour tout $v \in S$. Quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini de Γ, on peut donc supposer $\rho_\pi(\Gamma) \subset H_\pi(O_\pi)$, où O_π est l'anneau des entiers du corps K_π.

L'homomorphisme diagonal

$$\mathrm{Diag}\colon\ H_\pi(K_\pi) \to (\mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}}\, H_\pi)(\mathbf{Q}),$$

restriction des scalaires de K_π à $\mathbf{Q}$ pour le groupe H_π, composé avec ρ_π donne un homomorphisme

$$\mathrm{Diag}_\pi\colon\ \Lambda \to (\mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}}\, H_\pi)(\mathbf{Q}).$$

En particulier, on a l'inclusion $\mathrm{Diag}_\pi(\Gamma) \subset (\mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}}\, H)(\mathbf{Z})$, ce qui montre que le groupe $(\mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}}\, H_\pi)(\mathbf{R})$ est non compact, car $\mathrm{Diag}_\pi(\Gamma)$ est infini et $(\mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}}\, H)(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe discret dans $(\mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}}\, H_\pi)(\mathbf{R})$. On décompose $(\mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}}\, H_\pi) = L \times U$ comme produit de groupes algébriques définis sur $\mathbf{R}$ tel que le groupe $L_\mathbf{R}$ n'ait pas de facteur compact et le groupe $U_\mathbf{R}$ soit compact. Soit Δ l'image par la projection de $(\mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}}\, H_\pi)(\mathbf{Z})$ dans $L_\mathbf{R}$, qui soit un réseau dans $L_\mathbf{R}$. On note q_Λ la composée de Diag_π: $\Lambda \to (\mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}}\, H_\pi)(\mathbf{R})$ avec la projection sur $L_\mathbf{R}$. On remarque que l'image $q_\Lambda(\Gamma)$ a une projection non bornée sur chaque facteur simple de $L_{\mathbf{R}}$, donc le théorème de superrigidité du commensurateur donne un prolongement continu $q: G \to L_{\mathbf{R}}$ de q_Λ tel que $q(\Gamma) \subset \Delta$. On prouve que q est un isomorphisme de groupe de Lie, ce qui permet de conclure que la composée p de la projection sur $L_{\mathbf{R}}$ et de l'inverse de q est la présentation arithmétique cherchée:

$$p: (\mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}} H_\pi)(\mathbf{R}) \to G.$$

L'homomorphisme q est propre, car $q(\Gamma) \subset \Delta$ est un sous-groupe discret dans $L_{\mathbf{R}}$ et le réseau Γ est irréductible. Donc, q est injectif, car G est sans facteurs compacts.

L'image $q(G)$ est le groupe des $\mathbf{R}$-points d'un $\mathbf{R}$-sous-groupe algébrique dans $L' \subset L$ et l'adhérence de Zariski de $\mathrm{Diag}_\pi(\Lambda)$ est contenue dans $L' \times U \subset \mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}} H_\pi$. Pour prouver que q est surjectif, il suffit donc de prouver que l'adhérence de Zariski de $\mathrm{Diag}_\pi(\Lambda)$ est $\mathrm{Res}_{K_\pi/\mathbf{Q}} H_\pi$, ou, ce qui revient au même, que l'image de l'homomorphisme

$$\Lambda \to \prod_{\sigma \in S_\infty} H_\pi^\sigma, \qquad \lambda \mapsto (\sigma \rho_\pi(\lambda)_{\sigma \in S_\infty},$$

est Zariski dense. Soit E l'adhérence de Zariski de cet image et soit $J \subset S_\infty$ une partie maximale telle que la projection de E sur $\prod_{\sigma \in J} H_\pi^\sigma$ soit surjective. Supposons $J \neq S_\infty$. Pour $\alpha \in S_\infty - J$, l'intersection $E \cap H_\pi^\alpha$ est un sous-groupe propre par le choix de J et invariant dans H_π^α, car normalisée par le sous-groupe Zariski dense $\alpha \rho_\pi(\Lambda)$, donc elle est réduite à l'élément neutre. Ainsi, la projection de E sur $(\prod_{\sigma \in J} H_\pi^\sigma) \times H_\pi^\alpha$ est le graphe d'un homomorphisme. Il existe donc $\beta \in J$ et un isomorphisme $A: H_\pi^\beta \to H_\pi^\alpha$, tels que $A \beta \rho_\pi = \alpha \rho_\pi$, ce qui est absurde, car, pour au moins un $\lambda \in \Lambda$, on a

$$\mathrm{Tr}\, A \beta \rho_\pi(\lambda) = \mathrm{Tr}\, \beta \rho_\pi(\lambda) \neq \mathrm{Tr}\, \alpha \rho_\pi(\lambda),$$

puisque les plongements α et β du corps K_π dans $\mathbf{C}$ sont distincts. q.e.d.

Le critère d'arithméticité pour les réseaux réductibles se déduit du cas irréductible grâce au théorème de décomposition 6.4.

Finalement soient Γ un réseau arithmétique dans un groupe de Lie semisimple connexe adjoint et (p, H) une présentation arithmétique de Γ en particulier $p(\mathrm{Comm}_{H_{\mathbf{R}}^0} H_{\mathbf{Z}} \cap H_{\mathbf{R}}^0) \subset \mathrm{Comm}_G \Gamma$. Le fait que $\mathrm{Comm}_G \Gamma$ est dense dans G découle alors des deux résultats suivants:

Théoréme. [Bor2] *Soit H un $\mathbf{Q}$-groupe connexe semisimple. Alors* $H_{\mathbf{Q}} \subset \mathrm{Comm}_{H_{\mathbf{R}}} H_{\mathbf{Z}}$.

Théorème. [San] *Soit H un $\mathbf{Q}$-groupe linéaire connexe. Alors $H_{\mathbf{Q}}$ est dense dans $H_{\mathbf{R}}$.*

Remerciements. Nous remercions les participants au séminaire Borel 1986. Nous remercions A. Borel de son aide. La principale source pour ce séminaire et cette rédaction a été le livre de R. Zimmer [Zim].

Références

[Bai-Bor] Bailey, W.L., Borel, A.: Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. Ann. Math. **84**, 442–528 (1966)

[Ber] Berberian, S.: Measure and Integration. New York: Macmillan 1963

[Ber-Zel] Bernstein, I.N., Zelevinski, A.V.: Representations of the Group $GL(n, F)$ where F is a Non-Archimedean Local Field. Russ. Math. Surv. **31.3**, 1–68 (1976)

[Bor1] Borel, A.: Density Properties for Certain Subgroups of Semisimple Lie Groups Without Compact Factors. Ann. Math. **72**, 179–188 (1960)

[Bor2] Borel, A.: Density and maximality of arithmetic subgroups. J. Reine Angew. Math. **224**, 78–89 (1966)

[Bor-H.C] Borel, A., Harish-Chandra: Arithmetic subgroups of algebraic groups. Ann. Math. **75**, 485–535 (1962)

[Bou] Bourbaki, N.: Topological Vector Spaces. Springer: Berlin Heidelberg New York (1987), Chaps. 1–5

[Cor] Corlette, K.: Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry. Ann. Math. **135**, 165–182 (1992)

[Del-Mos] Deligne, P., Mostow, G.D.: Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy. I.H.E.S. Publ. Math. **63**, 5–90 (1986)

[Edw] Edwards, R.E.: Functional Analysis. New York: Holt, Rinehart and Winston 1965

[For-Pro] Formanek, E., Procesi, C.: The Automorphism Group of a Free Group Is Not Linear. J. Algebra **149**, 494–499 (1992)

[Fur1] Furstenberg, H.: A Poisson formula for semisimple Lie groups. Ann. Math. **77**, 335–383 (1963)

[Fur2] Furstenberg, H.: Boundary Theory and Stochastic Processes in Homogeneous Spaces. In: Moore, C.C. (ed.) Harmonic analysis on homogeneous spaces. (Proc. Symp. on Pure and Appl. Math., vol. 26, Williamstown, Mass., 1972, pp. 193–229

[Gar-Rag] Garland, H., Raghunathan, M.S.: Fundamental domains for lattices in **R**-rank 1, semisimple Lie groups. Ann. Math. **92**, 279–326 (1970)

[Gre] Greenleaf, F.: Invariant Means on Topological Groups. Princeton: van Nostrand 1969

[Gro-PS] Gromov, M., Piatetski-Shapiro, I.I.: Non-arithmetic groups in Lobachevsky spaces. I.H.E.S. Publ. Math. **66**, 93–103 (1988)

[Kaz1] Kazhdan, D.: Arithmetic varieties and their fields of quasi-definition. I.C.M. **2**, 321–325 (1970)

[Kaz2] Kazhdan, D.: On arithmetic varieties. In: Gelfand, I.M. (ed.) Lie groups and their representations. Akadémiai Kiadó, Budapest 1975

[Kaz3] Kazhdan, D.: On arithmetic varieties II. Isr. J. Math. **44**, 139–159 (1983)

[Kaz4] Kazhdan, D.: Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups. Funct. Anal. Appl. **1**, 63–65 (1967)

[Mañ] Mañé, R.: Teoria ergódica. IMPA, Projeto Euclides 1983

[Mar1] Margulis, G.A.: Discrete Groups of Motions of Manifolds of Nonpositive Curvature. I.C.M. **2**, 21–34 (1974); A.M.S. Transl. **109**, 33–45 (1977)

[Mar2] Margulis, G.A.: Arithmeticity of Irreducible Lattices in Semisimple Groups of Rank Greater than One. Invent. Math. **76**, 93–120 (1984)

[Mar3] Margulis, G.A.: Discrete subgroups of semisimple Lie groups. Ergeb. Math. Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. 17, Berlin Heidelberg New York: Springer 1991

[Moo] Moore, C.C.: Ergodicity of flows on homogeneous spaces. Ann. J. Math. **88**, 154–178 (1966)

[Mos1] Mostow, G.D.: Lectures on discrete subgroups of Lie groups. Notes by Gopal Prasad. (Lect. Math. Phys., vol. 48, Bombay: Tata Institute 1969

[Mos2] Mostow, G.D.: The Rigidity of Locally Symmetric Spaces. I.C.M. **2**, 187–197 (1970)

[Mos3] Mostow, G.D.: Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces. Ann. Math. Stud., vol. 78, Princeton: Princeton University Press 1973

[Mos4] Mostow, G.D.: On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space. Pac. J. Math. **86**, 171–276 (1980)

[Nor-Rag] Nori, M.V., Raghunathan, M.S.: On conjugation of locally symmetric arithmetic varieties. (Preprint)

[Pie] Pier, J.-P.: Amenable Locally Compact Groups. New York: Wiley 1984

[PS-Saf] Piatetski-Shapiro, I.I., Safarevic: Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. **30**, 671–705 (1966)

[Rag] Raghunathan, M.: Discrete Subgroups of Lie Groups. Berlin Heidelberg New York: Springer 1972

[San] Sansuc, I.-I.: Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. J. Reine Angew. Math. **327**, 12–80 (1981)

[Sav] Savin, G.: Limit multiplicities of cusp forms. Invent. Math. **95**, 149–159 (1989)

[Sch] Schoen, R. (Preprint)

[Ser] Serre, J.-P.: Lie Algebras and Lie Groups. Reading, Mass: Benjamin 1965

[Zim] Zimmer, R.: Ergodic Theory and Semisimple Groups. Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1984