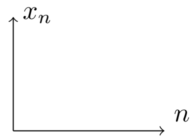
1. Ein Bakterienstamm wachse nur bei Zufuhr eines Mediums:
   - Zu Beginn gibt es genügend Nahrung, d.h. $\approx$ exponentielles Wachstum.
   - Dann wird das Medium knapp, das Wachstum nimmt ab und immer mehr Bakterien verhungern.
   - Eine mögliche rekursive Darstellung der Entwicklung (neben der logistischen) ist:

   $$x_{n+1} = g \cdot x_n \cdot \frac{C}{C + g \cdot x_n}, \quad C, g > 0 \text{ Konstanten, und } x_0 \geq 0.$$

   (a) Sei f die Reproduktionsfunktion der Entwicklung mit $f(x) = g \cdot x \cdot \dfrac{C}{C + g \cdot x}$ und $g, C > 0$, $x \geq 0$. Zeigen Sie:
      i. Es gibt immer den Fixpunkt $\widetilde{x_0} = 0$.
      ii. Es gibt genau dann einen weiteren Fixpunkt $\widetilde{x_1}$, wenn $g > 1$, und berechnen Sie dann $\widetilde{x_1}$. Interpretieren Sie dies. **Hinweis:** Für eine Reproduktionsfunktion ist nur $f(x) \geq 0$ sinnvoll.

   (b) Erstellen Sie für unterschiedliche Werte von x_0, g und C jeweils den Graphen der zeitlichen Entwicklung in einem (n, x_n)-Koodinatensystem

   Experimentieren Sie dazu mit einem Werkzeug Ihrer Wahl oder mit dem ersten Jupyter-Notebook,
   `https://metaphor.ethz.ch/x/2023/hs/401-0291-00L/#jupyter`
   Beschreiben Sie (mit Ihren Beobachtungen), warum dieses Modell passt.

2. Eine Population entwickle sich nach der logistischen DGL $N'(t) = rN(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{K}\right)$, mit den Konstanten $r > 0$ und $0 < N(0) = N_0 < K$.

   (a) Zeigen Sie, dass $t \mapsto N(t) = \dfrac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$ diese DGL löst.

   (b) Zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ kommt es noch zu einer externen Reduktion, gegeben durch eine Funktion H. Damit erhalten wir die Entwicklung $N'(t) = rN(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{K}\right) - H(t)$. Wir betrachten die beiden Fälle

   $$\text{i. } H(t) = I \cdot N(t) \qquad \text{und} \qquad \text{ii. } H(t) = I \cdot \frac{N(t)}{1 + N(t)}$$

   Die Konstante $I > 0$ interpretieren wir hier als die Intensität, mit der die Population reduziert wird.

   Bestimmen Sie jeweils die stationäre Lösung $N_\infty > 0$ für $r = 1, K = 2$ und $I = \dfrac{5}{8}$ in den beiden Fällen i. und ii.

   (c) Verifizieren Sie Ihre Lösungen aus (b) mit dem JNB . Umgekehrt, wählen Sie in dem JNB andere Konstanten r, K, I und bestätigen Sie durch eine Rechnung Ihre Beobachtung.

3. In Serie 4, Aufgabe 1(b) hatten wir gesehen:
   Die Funktion $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $N(t) = Ke^{\left(\ln\left(\frac{N_0}{K}\right)e^{-rt}\right)}$ *und* $0 < N_0 = N(0) < K$, $r > 0$ *erfüllt die Gompertz-DGL* $N'(t) = rN(t)\ln\left(\dfrac{K}{N(t)}\right)$. *Sie beschreibt annähernd das Wachstum eines Tumors.*

   (a) Berechnen Sie aus $N'(t) = rN(t)\ln\left(\dfrac{K}{N(t)}\right)$ die 2. Ableitung N''. Entscheiden Sie damit, für welche N_0 der Graph der Lösungskurve einen Wendepunkt hat. Wie verändert sich dann das allfällige Krümmungsverhalten?

(b) Vergleichen Sie die Wachstumskurven für die Logistische und die Gompertz-DGL beim Startwert $N_0 = \frac{K}{3}$ mit Hilfe des JNBs, siehe auch MC-Aufgabe 8. Alternativ können Sie auch mit den Vorschriften $N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$ und $N(t) = K e^{\left(\ln\left(\frac{N_0}{K}\right) e^{-rt}\right)}$ für die Lösungskurven und mit dem JNB für Funktionsplotten arbeiten.

4. Wir betrachten ein Entwicklungsmodell unter idealisierten Bedingungen (unbeschränktes Wachstum, ausreichendes Nahrungsangebot, genügend grosser Lebensraum). Nach n ZE bezeichne j_n die Anzahl Jungtiere und a_n die Anzahl erwachsener Tiere. Nach jedem Zeitschritt von n nach $n+1$ gilt:

   Pro Zeiteinheit entstehen aus einem erwachsenen Tier (durchschnittlich) $r > 0$ Jungtiere.

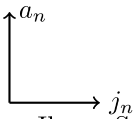
   Es sei $0 \leq p \leq 1$ der (durchschnittliche) Anteil der Jungtiere, die eine ZE überleben. Jedes Jungtier, das eine ZE überlebt hat, ist erwachsen.

   Es sei $0 \leq q \leq 1$ der (durchschnittliche) Anteil erwachsener Tiere, die eine ZE überleben.

   (a) Stellen Sie Gleichungen $j_{n+1} = \ldots$ und $a_{n+1} = \ldots$ auf.

   (b) Beschreiben Sie diese Gleichungen durch ein Matrix-Vektor-Produkt $v_{n+1} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot v_n$.

   (c) Es seien nun $r = 4.5$, $p = 0.42$ und $q = 0.6$ sowie $j_0 = 0$ und $a_0 = 20$. Bestimmen Sie j_n und a_n für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, und tragen Sie die Punkte (j_n, a_n) in ein Koordinatensystem mit folgenden Achsen



   ein. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen Ihrem Schaubild und dem Vektor $\begin{pmatrix} 2.6 \\ 1 \end{pmatrix}$?

5. Gegeben sei das Modell der Hasenpopulation von Fibonacci

   - Hasen werden in einem Monat erwachsen und sind unsterblich.
   - Jedes erwachsene Hasenpaar erzeugt jeden Monat ein Jungpaar; Jungpaare können sich nicht fortpflanzen.

   Für die Anzahl N_n der Hasenpaare nach n Monaten erhalten wir die Fibonacci-Zahlenfolge:

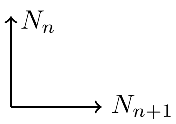
$$N_{n+1} = N_n + N_{n-1}, \quad N_0 = N_1 = 1.$$

   Wir möchten diese Entwicklung mit Hilfe der Linearen Algebra und dem Computer besser verstehen. Verwenden Sie hierfür das **Fibonacci-JNB**.

   (a) Seien $v_n = \begin{pmatrix} N_{n+1} \\ N_n \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass sich die Folge der Fibonacci-Zahlen als Matrix-Vektor-Produkt beschreiben lässt: $v_{n+1} = \begin{pmatrix} N_{n+2} \\ N_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot v_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_{n+1} \\ N_n \end{pmatrix}$

   (b) Verifizieren Sie mit dem **Fibonacci-JNB** folgendes:

   - Die Vektoren $v_n,\ n = 0, 1, 2, ...$ zeigen in einem (N_{n+1}, N_n)-Koordinatensystem



     in die gleiche Richtung, und liegen dementsprechend auf einer Geraden durch den Nullpunkt.
   - Berechnen Sie die Steigung dieser Geraden in diesem (N_{n+1}, N_n)-Koordinatensystem, indem sie für jedes n die Steigung des dazugehörigen Vektors berechnen und die Ergebnisse grafisch darstellen (plotten).
   - Plotten Sie nun nochmals die Punkte (N_{n+1}, N_n) und fügen Sie die Gerade mit der berechneten Steigung hinzu.

(c) Sei $\lambda = \dfrac{1}{\text{Die Steigung aus (b)}}$. Begründen Sie, warum die Vektoren in die Richtung $\begin{pmatrix}\lambda\\1\end{pmatrix}$ zeigen, einmal geometrisch und einmal, indem Sie $\dfrac{N_{n+1}}{N_n} \approx \lambda$ für grosse n verwenden.

(d) Es lässt sich zeigen, dass in der Tat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_{n+1}}{N_n} = \lambda$ gilt. Verwenden Sie dies, die Aufgabe 3(a) aus Serie 2 und $N_{n+1} = N_n + N_{n-1}$, um den exakten Wert λ zu bestimmen.

(e) Verifizieren Sie mit dem **Fibonacci-JNB**, dass die Folge der normierten Vektoren $\left(\frac{v_n}{|v_n|}\right)_n$ gegen $v_\infty = \begin{pmatrix}0,850651...\\0,525731...\end{pmatrix}$ konvergiert. Wie hängen $\begin{pmatrix}\lambda\\1\end{pmatrix}$ und v_∞ zusammen?

(f) Wählen Sie andere Startvektoren als $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Was beobachten Sie?

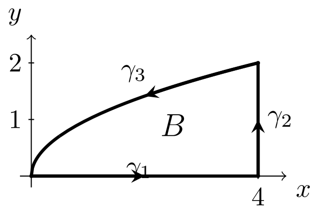
6. Sei $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 4\end{pmatrix}$. Die Matrix A definiert eine Entwicklung als Matrix-Vektor-Produkt: $v_{n+1} = A \cdot v_n$. Wir untersuchen die Folge der normierten Vektoren $\left(\dfrac{v_n}{|v_n|}\right)_n$.

   (a) Passen Sie das **Fibonacci-JNB** an, um es auf diese Entwicklung anzuwenden. Alternative ist das **Matrix-Vektor-JNB**.

   (b) Untersuchen Sie damit dann die Entwicklung für unterschiedliche Startvektoren.

   (c) Für fast jeden Startvektor konvergiert die Folge $\left(\dfrac{v_n}{|v_n|}\right)_n$ gegen einen Vektor v_∞. Berechnen Sie $\dfrac{1}{3}A \cdot v_\infty$. Was stellen Sie fest?

7. Gegeben seien drei Kurven γ_1, γ_2 und γ_3, die den Rand des Gebietes B mit drei Randpunkten $(0,0)$, $(4,0)$ und $(4,2)$ bilden (siehe Abbildung, die Pfeile kennzeichnen die Durchlaufrichtung).



Die Kurven γ_1 und γ_2 sind geradlinig, die Kurve γ_3 folgt der Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$.

Geben Sie für γ_1, γ_2 und γ_3 jeweils eine mögliche Parametrisierung an. Achten Sie dabei auf die Durchlaufrichtung.

$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \mathbf{0 \le t \le 4}$$

$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \mathbf{0 \le t \le 1}$$

$$\gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \mathbf{0 \le t \le 4}$$

Verifizieren Sie Ihre Lösung mit dem JNB.

Verwenden Sie das JNB, wenn es Ihnen hilfreich erscheint, z.B. 3(c) und (d), MC 6.

8. Ein Punkt bewege sich auf dem Rand des Einheitskreises γ. Seine Lage auf der Kurve zur Zeit t sei durch den Winkel $\varphi = \varphi(t)$ zur Zeit t bestimmt. Damit ist $\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi(t))\\\sin(\varphi(t))\end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$, dessen Betrag und den Beschleunigungsvektor $\gamma''(t)$. Zeichnen Sie für ein t die Vektoren $\gamma(t)$ und $\gamma'(t)$ an die Kurve. Experimentieren Sie mit dem JNB: zum Beispiel für $\varphi(t) = t^2$, Zeitpunkte $t_1 = \sqrt{\pi/4}$ und $t_2 = \sqrt{3\pi/4}$.

9. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme

   i) $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 2, y'(0) = 4$

   ii) $x'' + 2x' + x = 0 \quad \text{mit} \quad x(0) = x'(0) = 1.$

   Verifizieren Sie jeweils Ihre Lösung mit dem JNB.

10. Gegeben seien drei ebene Vektorfelder $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto K(x, y)$ mit

    (a) $K(x, y)$ ist überall senkrecht zur Geraden $x = 2$.

    (b) $K(x, y)$ ist überall senkrecht zur Geraden $x = y$.

    (c) $K(x, y)$ hat für alle Punkte $(x, y) \neq (0, 0)$ die Länge 1 und zeigt geradlinig vom Ursprung weg.

    Fertigen Sie jeweils eine Skizze an und bestimmen Sie $K(x, y)$. *Bemerkung:* Die Lösungen sind nicht eindeutig. Verifizieren und experimentieren Sie auch mit dem **JNB**; siehe auch **VL-Seite**.

11. Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$4y''(x) + y(x) = |x| \quad \text{für } x \in [-\pi, \pi] \tag{ODE}$$

    (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $4y''(x) + y(x) = 0$.

    (b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_p von (ODE) mit Hilfe des Ansatzes

$$y_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx), \tag{AN}$$

    indem Sie die Funktion $|x|$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ in eine 2π-periodische Fourier-Reihe entwickeln.

    (c) Bestimmen Sie diejenige Lösung von (ODE), für welche $y(-\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$ gilt.

    (d) Verifizieren Sie Ihre Lösung mit dem JNB.