Geschrieben von Salome Althaus, Betreuer: Stephan Schwab, Experte: Daniel Diserens, Gymnasium Biel-Seeland

Die Riemannsche Zetafunktion und ihr Indiz auf Ordnung in der Welt der Primzahlen

Einleitung

Die folgende Arbeit befasst sich mit der Riemannschen Zetafunktion. Für Unwissende ist es vermutlich unverständlich, zahlreiche Wörter und Zeichen einer mathematischen Funktion zu widmen, die in ihrer ursprünglichen formellen Darstellung lediglich an eine gewöhnliche Reihe erinnert. An dieser Stelle weise ich uninteressierte LeserInnen darauf hin, dass die Klauen der Unwissenheit Menschen in Abgründe ziehen, an denen sie das Licht der Wahrheit restlos verlässt. In der Tat verbirgt sich eines der grössten Geheimnisse in den Tiefen dieser Funktion, die indes bereits seit über hundertfünfzig Jahren mit grossem Widerstand dafür sorgt, dass keiner es lüftet.

1 Die Definition der Zetafunktion in den reellen Zahlen

$$\zeta(n)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

Konvergenzverhalten der Zetafunktion

Gilt $n=1$, so divergiert $\zeta(n)$ (sehr langsam allerdings!). Diese Reihe ist besser bekannt unter dem Namen «Harmonische Reihe». Für alle Werte $n>1$ konvergiert die Zeta-Funktion. Wir überzeugen uns von dieser Konvergenz mit nachfolgendem Beweis:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots=1+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\left(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}\right)\ldots$$

$$<1+\frac{2}{2^n}+\frac{4}{4^n}+\cdots=1+\frac{1}{2^{n-1}}+\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^3+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

Da die Reihe mit der unendlichen geometrischen Zahlenreihe in einer Ungleichung in Beziehung gebracht wurde, erhalten wir letzte Zeile gemäss

$$S=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{a_1}{1-q}\quad,\text{mit }\ q=\frac{1}{2^{n-1}}\ \text{ und } |q|<1$$

Damit die Reihe konvergiert, muss also gelten: $\left|\frac{1}{2^{n-1}}\right|<1\Rightarrow|2^{n-1}|>1,\Rightarrow\ n-1>0\ \Rightarrow n>1$

2 Primzahlen in der Zetafunktion

Jede positive ganze Zahl lässt sich in eindeutiger Weise als Produkt von Primzahlen ausdrücken. Daraus folgerte Euler: Jede positive ganze Zahl r lässt sich für irgendwelche $r_1,r_2,r_3,\ldots\in\{0,1,2,3,\ldots\}$ in der Form $r=2^{r_1}3^{r_2}5^{r_3}\ldots$ schreiben und deswegen haben wir

$$\frac{1}{r^x}=\frac{1}{(2^{r_1}3^{r_2}5^{r_3}\ldots)^x}=\frac{1}{2^{xr_1}3^{xr_2}5^{xr_3}\ldots}$$

Und für $x>1$: $\zeta(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^x}=\sum_{r_1,r_2,r_3\ldots\geq0}\frac{1}{2^{xr_1}3^{xr_2}5^{xr_3}\ldots}=$

$$\left(\sum_{r_1\geq0}\frac{1}{2^{xr_1}}\right)\left(\sum_{r_2\geq0}\frac{1}{3^{xr_2}}\right)\left(\sum_{r_3\geq0}\frac{1}{5^{xr_3}}\right)=\prod_{p\ prim}\left(\sum_{\propto=0}^{\infty}\frac{1}{p^{x\propto}}\right)$$

Auch hier ist jeder Term eine geometrische Reihe und deren Summe ist:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^x}}=\frac{1}{1-p^{-x}}$$

So erhalten wir eine Eulersche Formel:

$$\zeta(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^x}=\prod_{p\ prim}\frac{1}{1-p^{-x}}\quad,x>1$$

3 Die Gammafunktion

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt,\quad x>0$$

Es kann leicht gezeigt werden, dass

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

Wird x als positive ganze Zahl n betrachtet, offenbart sich durch die funktionale Beziehung

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$=(n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3)=\cdots=(n-1)!$$

Wir sehen so, wie die Gammafunktion als Verallgemeinerung der Fakultät, die nur für ganze positive Zahlen und der Null definiert ist, dient.

Euler hatte Goldbach 1729 den Vorschlag gemacht, die Definition $\Gamma(x)=\lim_{r\to\infty}\Gamma_r(x)$ zu verwenden. Dabei ist

$$\Gamma_r(x)=\frac{r!\,r^x}{x(1+x)(2+x)(3+x)\ldots(r+x)}=\frac{r^x}{x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{r}\right)}$$

Die Gammafunktion ist in dieser Form kaum wiederzuerkennen. Wir können aber die ursprüngliche Definition daraus herleiten, wenn wir uns überzeugen, dass die funktionale Beziehung und die Nebenbedingung beim Grenzübergang erfüllt sind: $\Gamma_r(x+1)=\frac{r!r^{x+1}}{(x+1)(x+2)\ldots(x+r)(x+1+r)}=\frac{r}{x+r+1}x\Gamma_r(x)$

$$\Gamma(x+1)=\lim_{r\to\infty}\Gamma_r(x+1)=\lim_{r\to\infty}\frac{r}{x+r+1}x\Gamma_r(x)=x\Gamma(x)$$

Gamma trifft Gamma

Karl Weierstrass (1815-1897) lieferte eine neue Definition der Gammafunktion, in der sie mit der Zahl Gamma $\gamma=\lim_{r\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{r}-\ln r)$ in Verbindung steht:

$$\Gamma_r(x)=\frac{e^{x\ln r}}{x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{r}\right)}=\frac{e^{x\left(\ln r-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{r}\right)}e^{\left(x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\cdots+\frac{x}{r}\right)}}{x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{r}\right)}=\frac{e^{x\left(\ln r-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{r}\right)}}{x}\frac{e^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\left(1+\frac{x}{2}\right)}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{\left(1+\frac{x}{3}\right)}\cdots\frac{e^{\frac{x}{r}}}{\left(1+\frac{x}{r}\right)}$$

$$=\frac{e^{-x(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{r}-\ln r)}}{x}\frac{e^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)}\frac{e^{x/2}}{\left(1+\frac{x}{2}\right)}\frac{e^{x/3}}{\left(1+\frac{x}{3}\right)}\cdots\frac{e^{x/r}}{\left(1+\frac{x}{r}\right)}$$

Das führt uns zu: $\frac{1}{\Gamma(x)}=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\Gamma_r(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{r}\right)e^{-x/r}$. Unter Verwendung dieses Ergebnisses können wir schreiben

$$;\frac{1}{\Gamma(x)}\frac{1}{\Gamma(-x)}=-x^2e^{\gamma x}e^{-\gamma x}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{x}{r}\right)e^{-x/r}\,e^{x/r}$$

Die funktionale Beziehung zeigt, dass $\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x)$, deshalb gilt: $\frac{1}{\Gamma(x)}\frac{1}{\Gamma(1-x)}=x\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)$

…und gemäss Eulerschen Produktentwicklung der Sinusfunktion $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

4 Die Beziehung zwischen Zeta- und Gammafunktion

Wir substituieren bei der Gammafunktion $t=ru$

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}(ru)^{x-1}e^{-ru}r\,du=r^x\int_0^{\infty}u^{x-1}e^{-ru}\,du$$

$$\frac{1}{r^x}=\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty}u^{x-1}e^{-ru}\,du$$

und so erhalten wir

$$\zeta(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^x}=\frac{1}{\Gamma(x)}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{\infty}u^{x-1}e^{-ru}\,du.$$

Da das Integral absolut konvergiert, können wir das Summenzeichen mit hinein nehmen:

$$=\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty}u^{x-1}\sum_{r=1}^{\infty}e^{-ru}\,du$$

Erneut bildet sich eine geometrische Reihe. Da sie nicht bei $r=0$ beginnt, müssen wir sie mit eins subtrahieren.

$$\zeta(x)=\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty}u^{x-1}\left(\frac{1}{1-e^{-u}}-1\right)du\ =\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty}u^{x-1}\left(\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1-e^{-u}}{1-e^{-u}}\right)du.$$

Das Erhaltene multiplizieren wir mit e^u

$$=\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty}u^{x-1}\frac{1}{e^u-1}\,du$$

Schliesslich ergibt sich der wichtige Zusammenhang, auf dem ich gerne weiter aufbauen würde, aber das Plakat ist zu klein.

$$\zeta(x)\Gamma(x)=\int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{e^u-1}\,du$$