Pio Blieske - Maturitätsarbeit 2018 - Mathematik - Kantonsschule Zürcher Oberland Wetzikon - Betreut von Beat Trachsler

# Zelluläre Automaten – Wenn einfach komplex ist

## Grundlagen

Einen zellulären Automaten kann man sich als ein unendlich grosses Gitter, das wie ein Schachbrett aussieht, vorstellen. Dessen Felder, genannt Zellen, können dabei zwei Zustände annehmen. Entweder sind sie schwarz, was als lebendig bezeichnet wird, oder weiss, was für tot steht. Eine Zelle, im Bild links schwarz dargestellt, hat jeweils 8 Nachbarn, welche grau gekennzeichnet sind. Die Zellen des Automaten können im Verlauf der Zeit ihren Zustand ändern, abhängig von ihrem Zustand und dem der Nachbarn zuvor. Eine tote Zelle wird im nächsten Zeitschritt zum Leben erweckt, wenn sie von genau drei lebenden Nachbarn umgeben ist. Hat eine lebende Zelle zwei oder drei Nachbarn, dann überlebt sie, ist im nächsten Zeitschritt also auch lebendig. Bei mehr oder weniger Nachbarn stirbt die Zelle an «Überbevölkerung» oder «Einsamkeit». Bei diesen einfachen Regeln vermutet man zunächst auch ein dementsprechend einfaches und vorhersagbares Verhalten. Dass dies jedoch nicht der Fall ist, sieht man, wenn man eine Computersimulation eines zellulären Automaten betrachtet. Dabei findet man verschiedene Muster, sogenannte Objekte, welche jeweils spezifische Eigenschaften aufweisen. So gibt es beispielsweise sogenannte Raumschiffe, welche sich quer über das Feld fortbewegen. Weiters existieren «Still-Lifes», welche stabil sind, also die folgenden Generationen genau gleich aussehen, und Oszillatoren, die vor Ort bleiben, dabei jedoch in einem bestimmten Zyklus das Muster ändern. (Animationen siehe Video unter QR-Code) Das oben gemachte Beispiel trägt den Namen «Game of Life» und wurde von John Conway entworfen. Es gibt unzählige weitere zelluläre Automaten, theoretisch unendlich viele, die jedoch alle nach dem gleichen Prinzip aufgebaut sind. Ein zellulärer Automat wird definiert durch ein Zellularfeld, eine Nachbarschaft, den Übergangsregeln (oder auch Überführungsfunktion) und den Zuständen, welche eine Zelle annehmen kann.

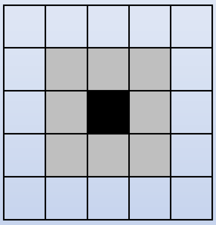

**Abb. 1: Nachbarschaft**

## Zielsetzung

Die Zielsetzung lässt sich in drei Teilzeile aufteilen:

1. Zelluläre Automaten mit Zellularfeldern zu untersuchen, deren Zellen die Form von gleichseitigen Dreiecken und regelmässigen Sechsecken haben
2. Suchstrategien für das Finden von interessanten Objekten zu entwickeln
3. Einen Zusammenhang zwischen den Regeln und dem Verhalten von zellulären Automaten zu finden

Dabei wurde nicht erwartet, für die dritte Frage eine endgültige Antwort zu finden, dies hätte für einiges mehr als eine Maturaarbeit gereicht. Jedoch ergaben sich beim Bearbeiten der dritten Fragstellung durchaus nützliche und interessante Erkenntnisse, welche oft hilfreiche Ideen und Techniken für die beiden anderen Zielsetzungen lieferten.

## Methodik

Im ersten Schritt ging es darum, Programme für die Simulation der zellulären Automaten zu schreiben, wofür C# und Visual Studio verwendet wurden. Dabei war es jedoch nicht das Ziel, eine besonders anwendungsfreundliche und optisch gutaussehende Benutzeroberfläche zu gestalten, sondern vor allem für die folgende mathematische Betrachtung geeignete Anwendungen zu entwerfen.

Um nach Objekten zu suchen, wurde jeweils mit einer zufällig gewählten Startkonfiguration in einem grossen Zellularfeld begonnen und anschliessend deren Entwicklung beobachtet. Zudem wurden einige der gefundenen Objekte von Hand manipuliert und kombiniert, wodurch einige weitere neue Objekte gefunden werden konnten.

## Resultate

Für die Suche nach Objekten wurde ein zellulärer Automat gewählt, dessen Zellen regelmässige Sechsecke sind und 6 Nachbarn haben. Dabei wurde die Regel 3/2 gewählt, wobei die Zahlen vor dem Slash angeben, bei wie vielen lebenden Nachbarn eine Zelle geboren, während die dahinter zeigen, bei wie vielen Nachbarn eine Zelle überlebt. Die folgende Abbildung zeigt einige der gefunden Oszillatoren. Animationen dieser Oszillatoren und weiteren sind im Video ab Minute 1:01 zu finden.

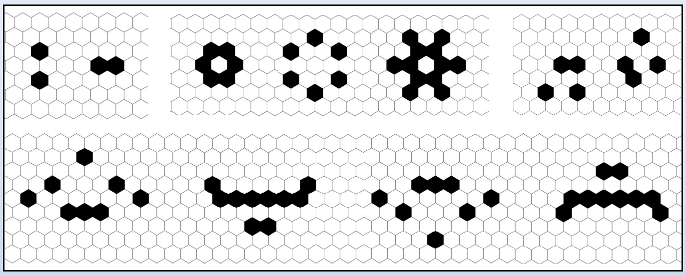

**Abb. 2: Gefundene Objekte**

Unter den gefundenen Objekten sind keine «Still-Lifes» zu finden, was wahrscheinlich daran liegt, dass die gewählte Regel keine «Still-Lifes» zulässt. Dass keine Raumschiffe gefunden wurden, lässt sich damit begründen, dass die angewandte Suchstrategie ungeeignet für das Finden von Objekten ist, welche nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit in zufälligen Feldern zu finden sind.

Zudem wurden zelluläre Automaten untersucht, deren Zellen gleichseitige Dreiecke sind und jeweils 3 Nachbarn haben. Dabei stehen wachsende Strukturen im Vordergrund, unter welchen man die Entwicklung aus einer lebenden Zelle in einem sonst leeren Zellularfeld versteht. Hier konnten für einige zelluläre Automaten Folgen gefunden werden, welche die Population $p_t$, also die Anzahl lebenden Zellen zum Zeitpunkt t, beschreiben:

Regel 0,1,2,3/1,2 : $p_t = 1 + \frac{3}{2}t(t+1)$

Regel /1,2,3 : $p_t = \frac{1}{8}(6t^2 + (-1)^t + 12t + 7)$

Regel 0,1,2/1,2 : $p_t = \frac{3}{8}(2t(t+5) + (-1)^{t-1}(2t-3) - 3)$

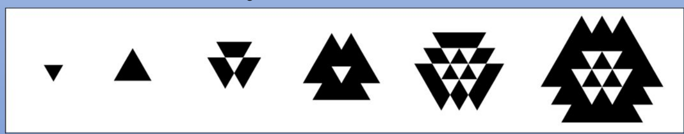

**Abb. 3: Wachstum der Regel 0,1,2/1,2**

Zudem konnte gezeigt werden, dass bei allen Regeln, welche B1 (eine Geburt bei genau einem Nachbarn) enthalten, ein unbegrenztes Wachstum vorherrscht, dies aufgrund von einem Wachstum an den Enden dreier Diagonalen, welches immer stattfindet. Ausserdem entsteht bei allen Regeln mit B1 und ohne B2 ein gezackter Rand (siehe Bild unten) zu den Zeitpunkten $t_n = 2^n - 1$ und $t_n = 2^n - 2$, je nach Ausrichtung. Von diesem gezackten Rand aus ist kein Wachstum mehr möglich, wodurch die Struktur von den Ecken aus weiterwächst und sich somit oftmals ein Fraktal (selbstähnliche Struktur) darin finden lässt (siehe Video ab 1:23).

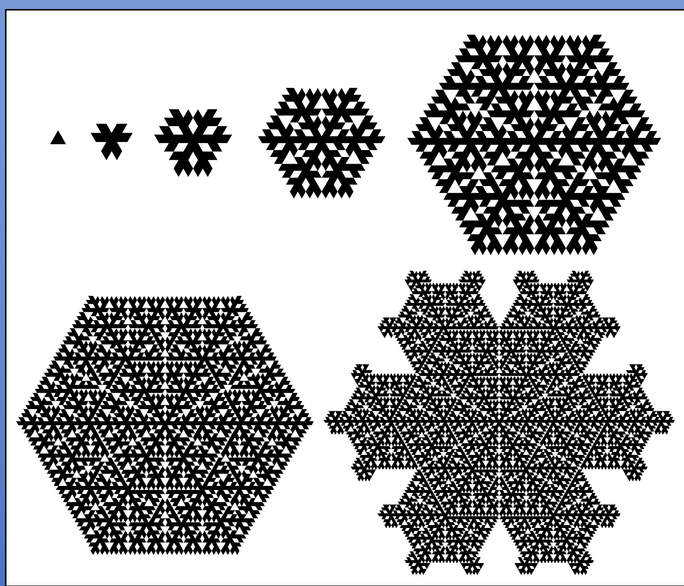

**Abb. 4: Wachstum der Regel 0,1,2,3/1 zu den Zeitpunkten t = 0, t = 3, t = 7, t = 15, t = 31, t = 63 & t = 103**