Does $1 + 2 + 3 + \cdots$ actually equal $-1/12$?

Eine Maturaarbeit von Alexander Basler aus der Klasse 19b
des Gymnasiums Biel-Seeland, betreut von Ioana Costantea

Zusammenfassung

In meiner Maturaarbeit habe ich mathematische Funktionen untersucht, welche Repräsentationen in Form von unendlichen Summen haben. Mit einer Technik aus der Funktionentheorie kann man den Definitionsbereich solcher Funktionen erweitern, sodass die Funktion auch an Stellen definiert ist, an denen die unendliche Summe divergent wird, also keinen Grenzwert hat. Angefangen habe ich dabei mit Beobachtungen zur geometrischen Reihe. Mit dem Fokus auf diese unendliche Summe habe ich zuerst die mathematischen Mittel aufgebaut, welche ich schliesslich auf die Riemannsche Zetafunktion anwenden wollte. So habe ich den Definitionsbereich der Zetafunktion erweitert und diskutiert, inwiefern der Wert $-1/12$ mit der titelgebenden divergenten Summe zusammenhängt.

1 – Die geometrische Reihe

Wir betrachten erst die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n .$$

Ohne uns Gedanken darum zu machen, in welchem Bereich diese unendliche Reihe konvergiert, schreiben wir etwas unbedacht:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$
$$xf(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = f(x) - 1.$$

Lösen wir die letzte Gleichung erhalten wir

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Offensichtlich ist diese Darstellung der Funktion aber nicht für alle x gültig. Ansonsten hätten wir mit $x = 2$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \frac{1}{1-2} = -1,$$

wobei die linke Summe aber klar divergiert. Andererseits gilt aber sehr wohl

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 .$$

Eine genauere Analyse der Partialsummen ergibt

$$s_k := \sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + \cdots + x^k \Rightarrow xs_k = s_{k+1} - 1.$$

Mit $s_{k+1} = s_k + x^k$ sehen wir

$$xs_k = s_k + x^k - 1 \Leftrightarrow s_k = \frac{1-x^k}{1-x}.$$

Diese Partialsumme ist nun korrekt für alle $x \neq 1$ und wir sehen, dass $k \to \infty \Rightarrow x^k \to 0$, falls $-1 < x < 1$. So wird einerseits klar, weshalb wir zuvor $\frac{1}{1-x}$ als geschlossene Darstellung erhielten und andererseits, für welche x diese geschlossenen Form korrekt ist. Unsere Gedanken bezüglich der divergenten Reihen können wir jedoch trotzdem fortführen, indem wir uns in eine neue Menge von Zahlen begeben; die Menge der komplexen Zahlen.

2 – Komplexe Zahlen

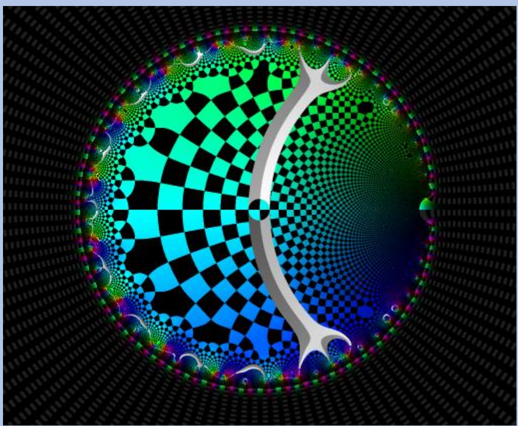
Die komplexen Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen und bilden die Antwort auf die Gleichung

$$z^2 = -1.$$

Wir definieren i als die Lösung dieser Gleichung und dann wird jede komplexe Zahl zu einer Kombination des Realteils a und Imaginärteils b mit reellen Zahlen a, b:

$$z = a + bi.$$

Im Gegensatz zu den reellen Zahlen sind komplexe Zahlen also in gewisser Weise «zweidimensional», sie sind nicht einfach auf einer Zahlengerade darstellbar sondern besitzen alle Komponenten (a, b). So können wir sie zum Beispiel in der Ebene darstellen. Eine Funktion von dieser komplexen Ebene in die komplexe Ebene ($f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) kann man deswegen nicht so einfach wie reelle Abbildungen darstellen, da man sie dafür im vierdimensionalen Raum darstellen würde. Stattdessen wendet man normalerweis einen Trick an und benutzt bestimmte Farben, um anzuzeigen, wie bestimmte Zahlen bei der Anwendung einer Funktion verschoben werden.



3 – Die geometrische Reihe in der komplexen Ebene

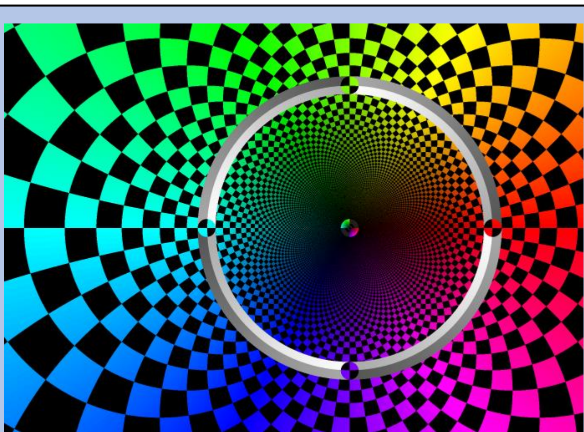
Wie zuvor betrachten wir erneut die Funktion

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n ,$$

wobei z nun ein komplexes Argument ist. Mit derselben Analyse wie zuvor bemerkt man, dass die Reihe konvergiert, solange $|z| < 1$, wobei $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ mit $z = a + bi$. Innerhalb der Ebene bildet die Menge aller komplexen Zahlen z mit $|z| < 1$ einen Kreis um den Ursprung mit Radius 1. Innerhalb dieses Kreis gilt erneut

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Es ist zu beachten, dass diese Funktion ihre Polstelle bei $z = 1$ hat. Dies ist der Grund dafür, dass die Reihe innerhalb des Kreises mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1 konvergiert. Wir können die Funktion nun innerhalb der komplexen Ebene darstellen und anschliessend die Definition einer analytischen Fortsetzung einführen, um unsere Fragen bezüglich der divergenten Summen zu beantworten, welche, mit etwas Unachtsamkeit, scheinbar auch $\frac{1}{1-z}$ ergeben zu scheinen. Die geometrische Reihe ist links abgebildet, es ist jedoch zu erwähnen, dass nicht die tatsächliche unendliche Summe abgebildet ist, sondern eine Annäherung, nämlich die sechzigste Partialsumme. Dadurch entstehen am Rand bestimmte Irregularitäten. Der grösste Teil des Hintergrundes ist schwarz, da die geometrische Reihe dort gegen unendlich strebt.



4 – Analytische Fortsetzungen und der Identitätssatz

Unsere Fragen bezüglich der Konvergenz und Repräsentativität der unendlichen Summen und ihrer geschlossenen Formen können wir letztlich mit einer Definition aus dem Bereich der Funktionentheorie beantworte. Gibt es eine komplexe Funktion f, welche auf einer Teilmenge U der komplexen Ebene definiert ist und eine Funktion F, welche auf einer anderen Teilmenge V definiert ist, sodass U und V sich schneiden und $F(z) = f(z)$ für alle z stimmt, welche sich in dieser Schnittmenge befinden, dann nennen wir F eine analytische Fortsetzung von f.

Wenden wir diese Definition auf die geometrische Reihe an, so wissen wir, dass f als

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

nur für $U = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ definiert ist. Andererseits aber ist

$$F(z) = \frac{1}{1-z}$$

für alle komplexen Zahlen bis auf $z = 1$ definiert und wir wissen, dass $f(z) = F(z)$ überall, wo f definiert ist. Damit ist F eine analytische Fortsetzung von f. Diese analytische Fortsetzung ist rechts dargestellt. Man beachte, dass sie innerhalb des Bereichs $|z| <$

Aufgrund des «Identitätssatzes für holomorphe Funktionen», sind nun aber alle möglichen analytischen Fortsetzungen auf eine gewisse Weise «eindeutig». Der Satz sagt unter anderem aus, dass wenn F_1 und F_2 beides analytische Fortsetzungen einer Funktion f sind, dann gilt überall, wo ihre Definitionsbereiche sich schneiden, $F_1(z) = F_2(z)$. Das heisst, die Werte aller möglichen analytischen Fortsetzungen einer Funktion sind eindeutig definiert. Diese Aussage bildet den Schlüssel zur Beantwortung der Titelfrage. Im letzten Schritt, betrachten wir nun die Riemannsche Zetafunktion.

5 – Die Riemannsche Zetafunktion

Die Riemannsche Zetafunktion ist vorerst definiert als

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots .$$

Es kann jedoch gezeigt werden, dass diese unendliche Reihe nur konvergiert, solange der Realteil von z, also a, wenn $z = a + bi$ ist, grösser als 1 ist, also $a > 1$. In meiner Maturaarbeit habe ich durch Integralrechnung innerhalb der komplexen Ebene die Zetafunktion auf die gesamte Ebene erweitert. Die anschliessend entstehende analytische Fortsetzung hier aufzuschreiben, würde den Rahmen des Plakats sprengen. Mit der Fortsetzung sieht man aber schliesslich

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

Dies könnte man aufgrund der ursprünglichen Definition von ζ falsch interpretieren als die Aussage, dass

$$\frac{1}{1^{-1}} + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \cdots = 1 + 2 + 3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}.$$

Mit unserem Wissen über analytische Fortsetzungen können wir aber ein befriedigendes und akkurateres Fazit ziehen; Die Summe aller natürlichen Zahlen hat keinen Grenzwert und ist damit divergent und sicherlich nicht gleichzusetzen mit $-1/12$. $-1/12$ ist jedoch der eindeutig bestimmte Wert der Riemannschen Zetafunktion im Punkt -1 und die ursprüngliche Definition der Zetafunktion in diesem Punkt wäre tatsächlich die Summe aller natürlichen Zahlen.