

Ein Sprint in die Differentialrechnung

Beim 100-Meter-Lauf am Sporttag legt Alice eine beachtliche Leistung hin; sie beschleunigt schnell und rast mit Volldampf einem Rekord entgegen. Während der ersten paar Sekunden ihres Sprints folgt ihre Bewegung ungefähr der folgenden Bewegungsgleichung:

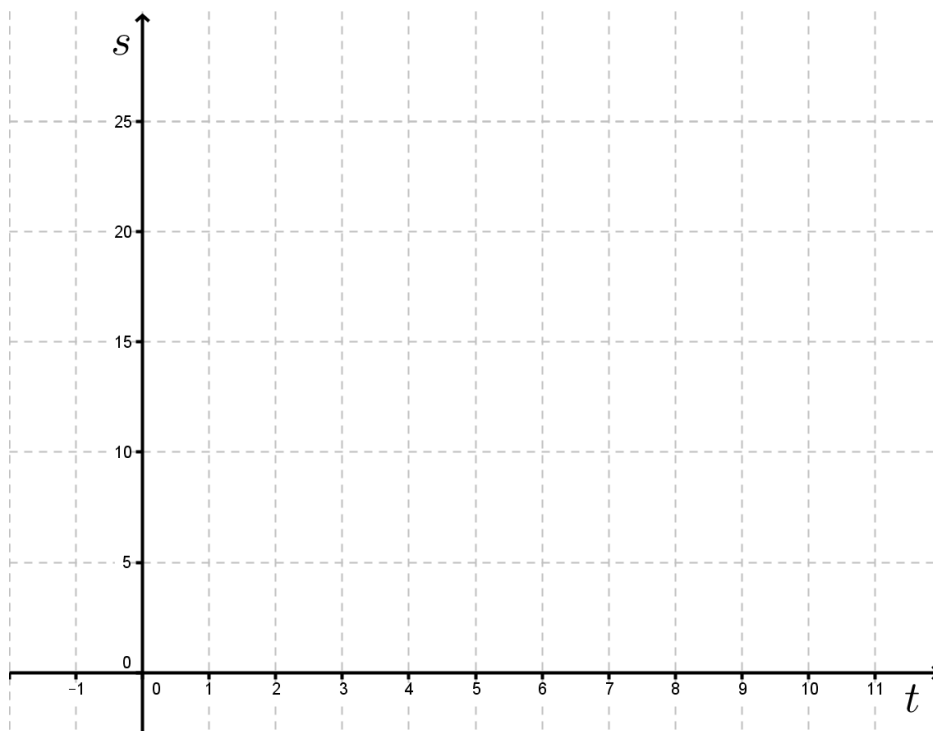
$$s(t) = 0.25 \cdot t^2$$

Das ist so zu verstehen, dass sie nach t Sekunden die Strecke $s(t) = 0.25t^2$ in Metern zurückgelegt hat. Wir denken uns entlang der Bahn ein Messband ausgelegt, so dass wir immer Alice' Position in Metern nach dem Startpunkt ablesen können.



Aufgaben:

- a) Skizzieren Sie den s - t -Graphen für $0 \leq t \leq 10$ so präzise wie möglich.



b) Welche Position lesen wir auf dem Messband 2 Sekunden nach Alice' Start ab? Und welche Position 6 Sekunden nach dem Start? Zeichnen Sie beide Zeitpunkte und Positionen in obigen Graphen ein.

c) Wie kann man aus den Angaben aus b) Alice' **Durchschnittsgeschwindigkeit** \bar{v} in m/s zwischen den beiden genannten Positionen berechnen?

c.1) Berechnen Sie diese.

c.2) Finden Sie im Graphen eine **geometrische Interpretation** von \bar{v} . Genauer: Sie haben in c.1 einen Quotienten berechnet; von welcher Geraden ist dieser Quotient die Steigung?

d) Gibt es einen Zeitpunkt, zu dem Alice' Momentangeschwindigkeit exakt gleich dem in c.1 berechneten Wert ist? Begründen Sie genau!

e) Ist Alice' Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2$ kleiner, gleich oder grösser als die in c.1 berechnete Durchschnittsgeschwindigkeit? Woran liegt das?

f) Berechnen Sie Alice' Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten 2 und $2 + \Delta t$ für $\Delta t = 4, 3, 2, 1, 0.5, 0.01$ Sekunden.

	Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten 2 und $2 + \Delta t$
$\Delta t = 4$	
$\Delta t = 3$	
$\Delta t = 2$	
$\Delta t = 1$	
$\Delta t = 0.5$	
$\Delta t = 0.01$	

- g) Was fällt beim Betrachten der Resultate aus f) auf? Können Sie diese Beobachtungen erklären? Insbesondere: Kann man sagen, die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 2 sei einfach das Verhältnis von Δs zu Δt , wenn beide den Wert 0 erreicht haben?
- h) Denken Sie sich einen Weg aus, wie Alice' **Momentangeschwindigkeit** zum Zeitpunkt $t = 2$ (also $v(2)$) näherungsweise oder gar exakt bestimmt werden könnte. Versuchen Sie wiederum, eine geometrische Interpretation von $v(2)$ im Graphen zu finden.