Es wäre wenig attraktiv, für jede Funktion, die uns begegnet, immer den Differentialquotienten auszurechnen, um die Ableitung in Erfahrung zu bringen, zumal wir schon gesehen haben, dass dies zu erheblichen technischen Schwierigkeiten führen kann. Viel angenehmer wäre es, wir würden über einen überschaubaren Satz von Ableitungsregeln verfügen, die das Differenzieren aller relevanter Funktionstypen erleichtern. Zweifellos müssen wir zum Beweis dieser Regeln immer wieder den Differentialquotienten benutzen. Sind die Regeln aber erst einmal gefunden, wird es sein, als wären wir über eine Leiter auf ein höheres Niveau gestiegen und könnten die Leiter nun, da wir oben angekommen sind, unter uns wegstossen. Wir werden sie – jedenfalls für den technischen Vorgang des Differenzierens – nicht mehr nötig haben. Darin liegt der grosse Reiz der nun folgenden Arbeit. Sie ist an sich interessant, ist sie aber einmal getan, wird uns das Ableiten für alle Zeit schnell und reibungslos von der Hand gehen und wir werden keine unter Umständen mühsamen Grenzwertprozesse mehr durchführen müssen.

a) Was können wir allgemein aussagen über die Ableitung einer konstanten Funktion? Und können Sie das sowohl geometrisch als auch algebraisch begründen?

____

____

b) Was können wir allgemein aussagen über die Ableitung einer linearen Funktion? Und können Sie das sowohl geometrisch als auch algebraisch begründen?

____

____

Wie lauten also wohl die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen (immer mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$)?

$$f : x \mapsto 3x - 1$$
$$g : x \mapsto -\tfrac{7}{8}x + 12$$
$$h : x \mapsto 2.4x$$
$$k : x \mapsto \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{2}$$

c) Was vermuten wir bezüglich der Ableitung einer Summe zweier Funktionen? Genauer: Ist $h(x) = f(x) + g(x)$ und kennen wir bereits die erste Ableitung von f und von g, was können wir dann über die erste Ableitung von h aussagen? Und warum?

____

____

Inwiefern haben wir diese Vermutung eigentlich bereits in Frage b) verwendet?

____

d) Was vermuten wir bezüglich der Ableitung eines Vielfachen einer Funktion? Genauer: Ist $g(x) = c \cdot f(x)$ für eine reelle Konstante c und kennen wir bereits die erste Ableitung von f, was können wir dann über die erste Ableitung von g aussagen? Und warum?

____

____

____

Inwiefern haben wir diese Vermutung eigentlich bereits in Frage b) verwendet?

____

e) Was vermuten wir bezüglich der Ableitung eines Produktes zweier Funktionen?

____

____

Was vermuten wir also zum Beispiel über die Ableitungen der folgenden Funktionen?

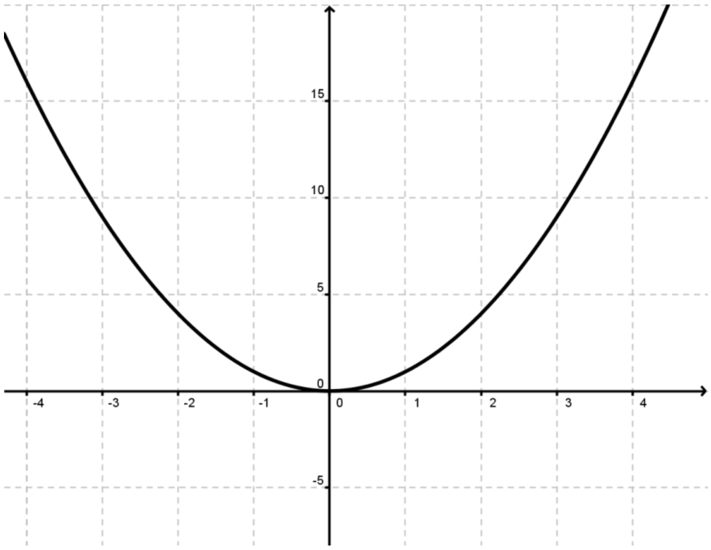
$$f : x \mapsto (2x-1)\cdot(7x+4)$$
$$g : x \mapsto x^2 \cdot x^3$$
$$h : x \mapsto e^x \cdot \sin(x)$$

Können wir eventuell bereits anhand eines dieser Beispiele überprüfen, ob die Vermutung korrekt ist oder nicht?

____

____

f) Hier sehen Sie einen Ausschnitt des Graphen der Funktion $f(x) = x^2$:



Berechnen Sie die erste Ableitung, und zeichnen Sie dann ihren Graphen hinzu.

Jemand verrät Ihnen einen Trick:

Ist eine Potenzfunktion $f(x) = x^p$ gegeben, so ist ihre erste Ableitung gleich $f'(x) = p \cdot x^{p-1}$.

Trifft das für obiges Beispiel zu?
Und haben Sie eine Idee, wie man allgemein überprüfen könnte, ob diese Vermutung wirklich allgemein zutrifft oder nicht?