Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum

Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Armin P. Barth

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum
Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Umkehrfunktion – in einer Hochschul-Anfängervorlesung:

Sei $f: A \to B$ eine Funktion.
$\mathrm{Im}(f) := \{ f(x) \mid x \in A \}$

Im Allgemeinen ist die Bildmenge der Funktion eine echte Teilmenge des Wertevorrates, also: $\mathrm{Im}(f) \underset{\neq}{\subset} W(f)$

Gilt jedoch Gleichheit, so ist jedes Element des Wertevorrates das Bild von wenigstens einem Element $x \in A$. In diesem Fall heisst die Funktion **surjektiv**.

Bei einer surjektiven Funktion gilt also: $\mathrm{Im}(f) = W(f)$ beziehungsweise $f(A) = B$

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum
Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Die Funktion $f: A \to B$ heisst **injektiv**, wenn für zwei beliebige Elemente $x_1, x_2 \in A$ gilt: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Verschiedene Inputs haben also zwingend verschiedene Outputs.

Ist $f: A \to B$ gleichzeitig surjektiv und injektiv, so heisst die Funktion **bijektiv**.

Damit ist nicht nur für jedes $x \in A$ genau ein $y \in B$ festgelegt (durch *f*), sondern auch umgekehrt für jedes $y \in B$ genau ein $x \in A$, nämlich das wohlbestimmte x mit $f(x) = y$

In anderen Worten:

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum

Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Für jede bijektive Funktion $f : A \to B$ ist die sogenannte **Umkehrfunktion**

$$f^{-1} : B \to A, \quad y \mapsto \text{"dasjenige } x \in A \text{ mit } f(x) = y\text{"}$$

erklärt.

Die Umkehrfunktion macht die Wirkung der Funktion rückgängig. Sie ist ebenfalls bijektiv, und es gilt:

$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ (Übung)

Beispiele: …

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum
Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Ganz anders verläuft der Unterricht am Gymnasium:

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum
Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Eins: Vorwissen testen, aktivieren

- Was ist eine Funktion?
- typische / wichtige Beispiele
- Bezeichnungen und Notationen
- Definitionen (Definitionsbereich, Wertebereich, Bild und Urbild, abhängige und unabhängige Variable, …)
- Wertetabelle und Graph
- usw.

Dafür eignen sich gut gemachte Vortestaufgaben…

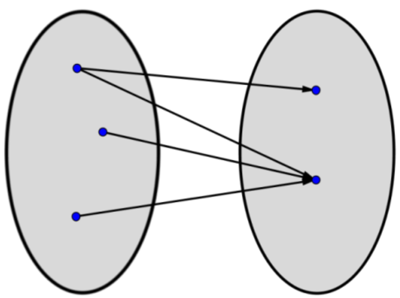
Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum

Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

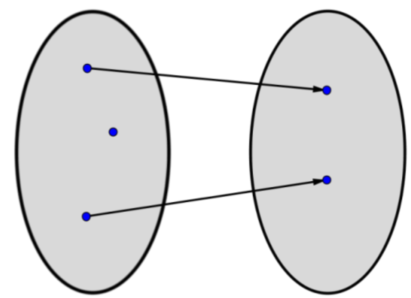
Eins: Vorwissen testen, aktivieren

Beispiel:
Wenn Sie erfahren, dass nur genau eine dieser Abbildungen eine Funktion von der ersten Menge (links) in die zweite Menge (rechts) darstellt, um welche muss es sich dann handeln?

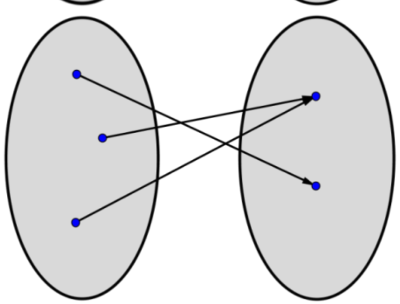
a)



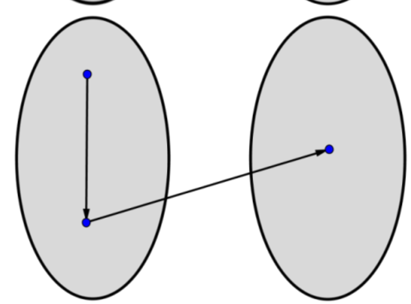
b)



c)



d)



Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum

Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Eins: Vorwissen testen, aktivieren

Beispiel:

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

a) Die Funktion $f(x) = 3^x$ ist definiert für jede reelle Zahl .

b) Bei der Funktion $y = x^2$ hat jede reelle Zahl y zwei Urbilder.

c) Sei f eine beliebige Funktion mit $f(0) = 0$. Dann hat die Funktion $g(x) = f(x) + 7.2$ den y-Achsenabschnitt 7.2.

d) Jede lineare Funktion hat genau eine Nullstelle.

e) Die Funktion aus a) ist streng monoton wachsend.

…

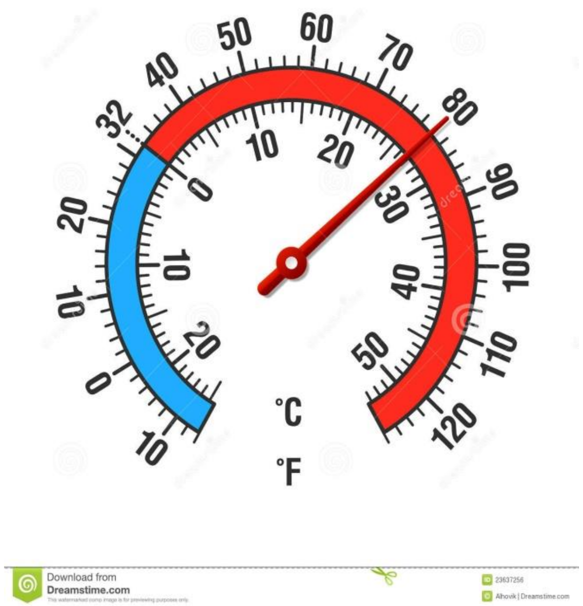
Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum

Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Zwei: Kognitive Aktivierung (enge Fragestellung)

Alice und Bob planen eine USA-Reise und erfahren, dass man Grad Celsius (x) gemäss folgender Funktion in Grad Fahrenheit (y) umrechnen kann:

$$\boxed{f : x \mapsto y = \frac{9}{5}x + 32}$$



Im Hinblick auf die Reise wäre es bequemer, sie hätten eine Funktion, die Grad Fahrenheit in Grad Celsius umrechnet. Können Sie Alice und Bob helfen?

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum
Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Zwei: Kognitive Aktivierung (offene Fragestellung)

Angenommen, es gibt irgendwo auf der Welt ein weiteres Temperaturmass, Grad Z, und es existiert eine Funktion f, die Grad Celsius (x) in Grad Z (z) umrechnet, aber Sie kennen sie nicht und sie ist unter Umständen sehr kompliziert aufgebaut.

$$\boxed{f : x \mapsto z = \ldots}$$

Ist es dann immer möglich, eine neue Funktion zu finden, die Grad Z in Grad Celsius umrechnet? Hängt das von der Funktion f ab? Wenn nein: warum nicht? Wenn ja: in welcher Weise?

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum

Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Zwei: Kognitive Aktivierung (Vorbereitung der Injektivität)

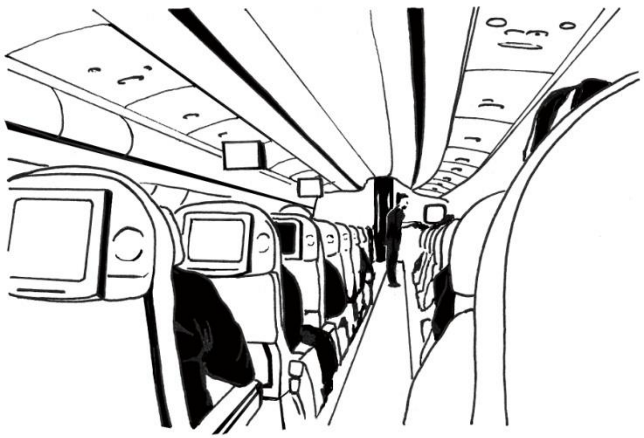
Im Folgenden sehen Sie mehrere Funktionen, die in zwei Spalten angeordnet sind. Sie erfahren, dass alle Funktionen der linken Spalte eine ganz besondere Eigenschaft besitzen, die alle Funktionen der rechten Spalte nicht haben. Welche Eigenschaft könnte das sein? Können Sie sie in präzisen Worten beschreiben?

In der Theatergarderobe wird jedem Mantel eine Nummer zugeordnet.

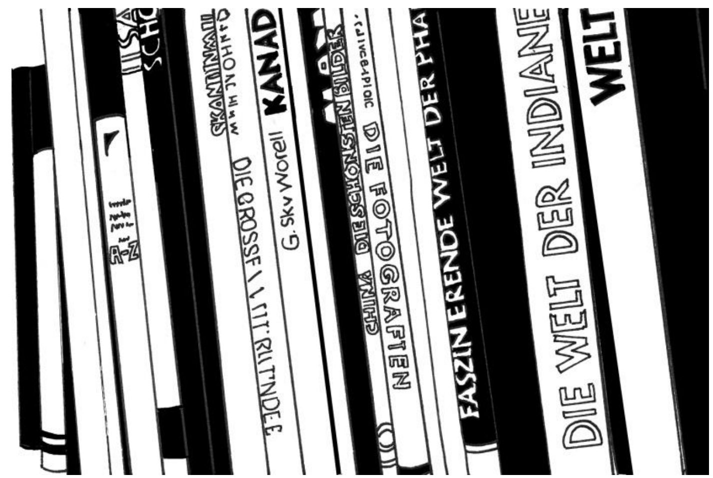
Auf dem Gemüsemarkt wird jedem Gemüse sein Kilopreis zugeordnet.

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum
Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Zwei: Kognitive Aktivierung (Vorbereitung der Injektivität)



Im Flugzeug wird jedem Passagier seine Platznummer zugeordnet.



Auf einem Bücherregal wird jedem Buch die Anzahl Buchseiten zugeordnet.

und so weiter…

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum
Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Drei: Instruktion mit guten Erklärungen und mental tools:

Anziehen und Ausziehen von Kleidern:

Am Morgen:
- Zuerst T-Shirt,
- dann Pullover,
- dann Jacke anziehen.

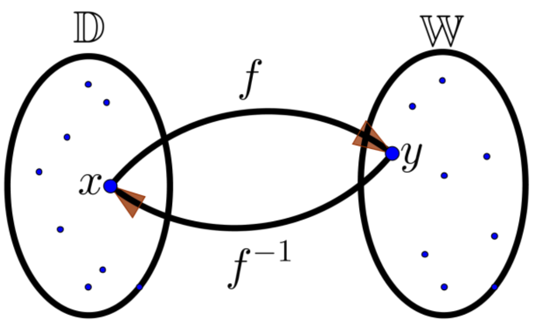
Abends:
- Zuerst Jacke,
- dann Pullover,
- dann T-Shirt ausziehen.

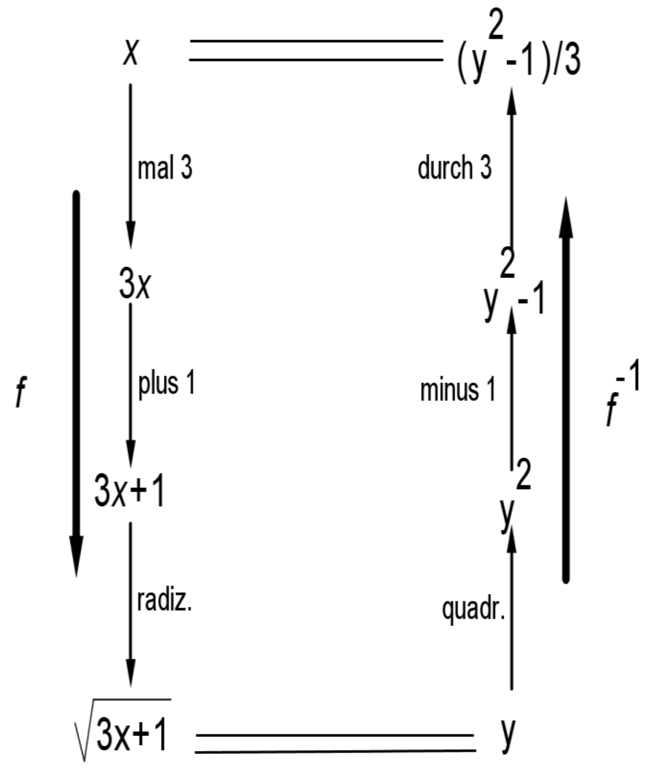
Also: **Operationen in Wirkung und Reihenfolge umkehren**!

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum
Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Drei: Instruktion mit guten Erklärungen und mental tools:

Beispiel: $f(x) = \sqrt{3x+1}$





Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum
Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Vier: Wissenssicherung: Selbsterklärung

1.) Finden Sie präzise Fortsetzungen der folgenden Satzanfänge:

a) Bei einer bijektiven Funktion f gibt es keine zwei Inputs x_1, x_2, so dass …

b) Bei einer bijektiven Funktion f ist jeder Wert $y \in W(f)$ …

c) Bei einer surjektiven Funktion f ist jeder Wert $y \in W(f)$ …

d) Bei einer injektiven Funktion f gilt für zwei beliebige Inputs x_1, x_2, dass …

2.) Erklären Sie, weshalb es falsch wäre anzunehmen, dass eine injektive Funktion automatisch bijektiv ist.

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum

Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Vier: Wissenssicherung: Selbsterklärung

3.) Weshalb kann es überhaupt erstrebenswert sein, bijektive Funktionen zu haben? Worin liegt unter Umständen der grosse Vorteil?

4.) Erklären Sie, weshalb eine lineare Funktion mit $a \neq 0$ sicherlich bijektiv ist?

5.) Yannick argumentiert: „Die Funktion $f: x \mapsto x^3 - x$ ist bijektiv, weil die Funktion *ungerade* ist.“ Ist das eine gute Begründung? Falls nein, verbessern Sie sie bitte.

6.) Erklären Sie einem Unkundigen, was man unter der *Umkehrfunktion* einer (bijektiven) Funktion versteht. Wie notiert man sie? Worauf ist genau zu achten? Illustrieren Sie den Sachverhalt auch anhand einer Skizze.

7.) Belinda rechnet vor: „Wenn $f(x) = 2x - 7$ ist, dann wird zuerst verdoppelt und danach 7 subtrahiert. Also muss die Umkehrfunktion erst halbieren und dann 7 addieren. Daher ist $f^{-1}(x) = 0.5x + 7$.“ Ist dieses Argument makellos? Falls nein, verbessern Sie es bitte.

und so weiter…

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum

Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Vier: Wissenssicherung: Metakognitive Aufträge

1.) Könnte ich einem Laien das Konzept der Umkehrfunktion erklären? Fühle ich mich insbesondere sicher und kompetent bei der Definition der Umkehrfunktion und ihrer formalen charakteristischen Eigenschaft?

2.) Bin ich in der Lage, anhand guter Skizzen und aber auch mittels mathematischer Definitionen zu erklären, was man unter einer (i) surjektiven, (ii) injektiven, (iii) bijektiven Funktion versteht und weshalb (im Hinblick auf welche Fragen) das wichtig ist?

3.) Könnte ich Beispiele von Funktionen angeben, die (i) bijektiv, (ii) injektiv, aber nicht surjektiv, (iii) surjektiv, aber nicht injektiv, (iv) weder injektiv, noch surjektiv sind?

4.) Fühle ich mich ganz sicher und kompetent bei der Frage, wie konkret die Umkehrfunktion einer (bijektiven) Funktion bestimmt werden kann und was für eine Rolle der Definitions- und der Wertebereich dabei spielt?

und so weiter…

Ein Beispiel aus dem MINT-Lernzentrum
Mathematikunterricht am Gymnasium: Die Umkehrfunktion

Fünf: Anwendungen / Übungen /Aufgaben

- Aufgaben mit nahem Transfer und mit distalem Transfer
- Diverse Anwendungen
- Querbezüge
- und so weiter …

Sei $f : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{3x-5}$. Geben Sie den Definitions- und Wertebereich an.
Geben Sie ein gutes Argument dafür an, dass diese Funktion bijektiv ist.
Notieren Sie dann die Umkehrfunktion sowie deren Definitions- und Wertebereich, und skizzieren Sie beide Graphen.
Was beobachten Sie? Wie lässt sich das gut erklären?