

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Departement Mathematik

Masterarbeit

Credibility Chain Ladder

Eingereicht von: Patrick Helbling

Eingereicht am: 12.02.2014

Betreuer: Prof. Dr. Alois Gisler

Vorwort

Diese Arbeit entstand im Zeitraum von September 2013 bis Februar 2014 und ist die Abschlussarbeit meines Mathematikstudiums an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei meinem Betreuer, Prof. Dr. Alois Gisler, bedanken, der es mir ermöglicht hat, eine Arbeit über ein für die Versicherungspraxis relevantes Thema zu verfassen und mir stets mit wertvollen Ratschlägen zur Seite stand. Zudem möchte ich mich bei Olivier Steiger und Martin Walti für die anregenden Diskussionen, sowie bei Dorian Regazzi für die Tipps zur Programmierung, bedanken. Ein besonderer Dank geht auch an meine Eltern und meine Freundin, die mich während des gesamten Studiums immer unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Klassische Chain Ladder Methode	3
2.1	Die klassische Chain Ladder Methode	3
2.2	Der bedingte erwartete quadratische Schätzfehler MSE _P	6
2.3	Formeln für den MSE _P im klassischen CL-Modell	7
3	Bayes'sche Chain Ladder Methode	8
3.1	Die Bayes'sche Chain Ladder Methode	8
3.2	Formeln für den MSE _P im Bayes'schen CL-Modell	12
4	Credibility für die Chain Ladder Methode	12
4.1	Das Credibility CL-Modell	12
4.2	Formeln für den MSE _P im Credibility CL-Modell	18
5	Multidimensionale Credibility für die Chain Ladder Methode	26
5.1	Das multidimensionale Credibility CL-Modell	26
5.2	Ein mögliches Modell für die Kovarianzmatrix T	29
5.3	Erweitertes Modell für die Schätzung der strukturellen Parameter σ^2 und τ^2	32
5.4	Formeln für den MSE _P im multidimensionalen Credibility CL-Modell	36
6	Numerische Beispiele	43
6.1	Einfluss des erweiterten Modells 5.1 auf die Credibility Koeffizienten κ	43
6.2	Einfluss des Korrelationsparameters ρ auf die Credibility-Schätzer im multidimensionalen Credibility CL-Modell	44
6.3	Vergleich der verschiedenen Modelle anhand der Gruppen 9 und 7	48
6.4	Resultate zu den geschätzten Rückstellungen und zum MSE _P	52
Anhang		55
	Berechnete Abwicklungsfaktoren	55
	Verwendete Daten	57

1 Einleitung

Die Chain Ladder Methode ist bereits seit vielen Jahren die am weitesten verbreitete Methode zur Schätzung von Schadenrückstellungen in der Versicherungspraxis. In der aktuariellen Literatur wird diese Methode üblicherweise nur auf ein einzelnes Abwicklungsdreieck angewendet. In der Praxis gibt es jedoch oft Situationen, in denen mehrere "ähnliche" Abwicklungsdreiecke vorhanden sind, zum Beispiel Dreiecke gleicher Branchen aus unterschiedlichen Geschäftseinheiten, Dreiecke von bestimmten Tarifgruppen einer Branche oder auch Dreiecke von vergleichbaren Branchen. Da für den Geschäftsabschluss meist nur das Total der Rückstellungen relevant ist, werden dort die "ähnlichen" Dreiecke zu einem Gesamtdreieck, zum Beispiel zu einem Abwicklungsdreieck aller Geschäftseinheiten einer Branche, aufaddiert. Für die Prämienberechnung oder für Profitbetrachtungen interessieren jedoch auch die Rückstellungen auf tieferer Stufe. Oft werden dann die aufgrund des Gesamtdreiecks ermittelten Abwicklungsfaktoren auf die einzelnen "ähnlichen" Dreiecke angewendet, was allerdings zu Verzerrungen führen kann, da sich das Abwicklungsverhalten der verschiedenen Untereinheiten doch beträchtlich unterscheiden kann. Die Chain Ladder Methode nur auf eine einzelne Untereinheit anzuwenden, ist dabei meist keine geeignete Lösung, da üblicherweise nur wenige Daten vorhanden sind und es deshalb zu grossen Schwankungen kommen kann. Die Credibility Theorie ist geradezu prädestiniert für solche Situationen. Sie ermöglicht es, sowohl die Daten des Kollektivs, das sind alle "ähnlichen" Dreiecke zusammen, wie auch die eines einzelnen Dreiecks, in optimaler Weise zu verbinden. Auf diese Weise können geeignete Abwicklungsfaktoren, und somit auch die Schadenrückstellungen, für die individuellen Untereinheiten bestimmt werden.

Ein Bayes'scher Ansatz für die Chain Ladder Methode wurde erstmals in [4] betrachtet. Wie man Credibility mit Hilfe eines Bayes'schen Ansatzes auf die Chain Ladder Methode anwenden kann, wurde von A.Gisler und M.V.Wüthrich in [5] gezeigt. Dieser Artikel bildet auch die Basis für diese Masterarbeit.

In einem ersten Schritt dieser Masterarbeit wurden die Resultate und Techniken aus [5] auf einen konkreten Datensatz aus der Unfallversicherung angewendet und die Rückstellungen, sowie deren Genauigkeit (mean squared error of prediction), bestimmt. Die Ergebnisse zeigten, dass die Schätzung der strukturellen Parameter, besonders in den hinteren Abwicklungsjahren, ein Problem ist und zu nicht erklärbaren Unterschieden bei den Credibility-Gewichten der einzelnen Abwicklungsjahren führt. In dieser Masterarbeit wird diesem Problem begegnet, indem mehr Struktur in das Modell zur Schätzung der strukturellen Parameter hineingebracht wird. Ein weiteres

Problem ist, dass die hinteren Abwicklungsfaktoren aufgrund von kleinen Credibility-Gewichten stark zu den kollektiven Abwicklungsfaktoren gezogen werden. Mit dem in dieser Arbeit betrachteten multidimensionalen Credibility Modell ist es möglich, diesem Problem entgegenzuwirken und dabei eine noch stärkere Glättung der Abwicklungsfaktoren zu erreichen.

Im Abschnitt 2 wird zunächst das klassische Chain Ladder Modell von Mack eingeführt. Anschliessend folgt in Abschnitt 3 das Chain Ladder Modell mit dem Bayes'schen Ansatz, das die Grundlage für das Credibility Modell aus Abschnitt 4 bildet. Für das Credibility Modell werden in dieser Masterarbeit auch die homogenen Schätzer betrachtet, was bei der Schätzung der Schätzfehler zu leichten Abweichungen, verglichen mit den Formeln aus [5], führt. Zudem wird in dieser Arbeit auch eine Formel für den Schätzfehler eines gesamten Portfolios hergeleitet. In Abschnitt 5 wird das multidimensionale Credibility Modell für die Chain Ladder Methode eingeführt und in 5.3 wird die erweiterte Struktur zur Schätzung der strukturellen Parameter gezeigt, welche zu besseren Schätzresultaten führt. Ausserdem werden auch für das multidimensionale Credibility Chain Ladder Modell Formeln zur Bestimmung der Schätzgenauigkeit hergeleitet. Im letzten Teil der Arbeit, in Abschnitt 6, werden verschiedene numerische Beispiele diskutiert, welche die Unterschiede der verschiedenen Modelle aufzeigen und die Vorteile des multidimensionalen Credibility Modells veranschaulichen. Zudem werden auch die Resultate der berechneten Rückstellungen und der Schätzfehler präsentiert, welche durch die verschiedenen Modelle und Formeln zustande kommen. Die Beispiele wurden anhand von realen Daten aus der Unfallversicherung gerechnet, welche im Anhang zu finden sind. Sämtliche Berechnungen wurden in Excel mit Hilfe von Microsoft Visual Basic for Applications (VBA) durchgeführt und auch alle Grafiken, Diagramme und Tabellen wurden in Excel erstellt. Die Arbeit selbst wurde in \LaTeX verfasst.

2 Klassische Chain Ladder Methode

2.1 Die klassische Chain Ladder Methode

Der folgende Abschnitt, sowie auch die Abschnitte 3 und 4, basieren auf dem Artikel *Credibility for the Chain Ladder Reserving Method* von A.Gisler und M.V.Wüthrich [5].

Sei $C_{i,j}$ die kumulierte Schadenzahlung des Schadenjahres $i \in \{0, \dots, I\}$ bis zum Ende der Abwicklungsperiode $j \in \{0, \dots, J\}$. Wir können annehmen, dass eine Abwicklungsperiode ein Jahr dauert. Zudem nehmen wir an, dass die Schäden nach J Abwicklungsperioden vollständig reguliert sind. Somit bezeichnet $C_{i,J}$ den totalen Schadenwert des Schadenjahres i . Als Abkürzung bezeichnen wir $C_{i,j}$ im Folgenden als Schaden des Schadenjahres i am Ende des Abwicklungsjahres j und $C_{i,J}$ als endgültigen Schaden. Zum Zeitpunkt I sind Beobachtungen in Form eines Beobachtungsdreiecks

$$\mathcal{D}_I = \{C_{i,j} : 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J, i + j \leq I\} \quad (2.1)$$

gegeben und gesucht sind Schätzungen für die Schäden $C_{i,j}$ mit $i + j > I$, welche das Dreieck zu einem Rechteck ergänzen. Insbesondere sind wir an den endgültigen Schäden $C_{i,J}$, sowie an den daraus resultierenden Verpflichtungen

$$R_i = C_{i,J} - C_{i,I-i} \quad (2.2)$$

interessiert.

Schadenjahr i	Abwicklungsjahr j										
	0	1	...	j	$J-2$	$J-1$	$J=I$	
0	D_I										
1											
...											
...											
i											
...											
...											
$I-2$											
$I-1$											
I											

Abbildung 1: Skizze eines Abwicklungsdreiecks

Bemerkungen:

- Falls $J < I$ ist, ist \mathcal{D}_I kein Dreieck, sondern ein Trapez. Da das Vorgehen und die Formeln jedoch gleich bleiben, werden wir uns auf das Dreieck beschränken und die analogen Aussagen für das Trapez weglassen.
- Das Beobachtungsdreieck wird auch Abwicklungsdreieck genannt.

Für $j = 0, 1, \dots, J$ definieren wir

$$\mathbf{C}_j = (C_{0,j}, C_{1,j}, \dots, C_{I-j,j})' \quad (2.3)$$

als die Spaltenvektoren des Beobachtungsdreiecks \mathcal{D}_I und für $k \leq I - j$ definieren wir

$$S_j^{[k]} = \sum_{i=0}^k C_{i,j} \quad (2.4)$$

als die Spaltensumme des Abwicklungsjahres j bis zum Schadenjahr k . Für die Chain Ladder Methode wird angenommen, dass die sukzessiven Spaltenvektoren $(C_{0,j}, \dots, C_{I,j})'$ für $j = 0, 1, \dots, J$ bis auf zufällige Schwankungen, proportional zueinander sind. Es gilt also

$$C_{i,j+1} \simeq f_j C_{i,j}, \quad (2.5)$$

wobei $f_j > 0$ die sogenannten Chain Ladder- oder Abwicklungsfaktoren sind. Bei der klassischen Chain Ladder Methode werden zum Zeitpunkt I die Zufallsvariablen $C_{i,k}$ für $k > I - i$ durch die Chain Ladder Prognosen

$$C_{i,k}^{CL} = C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{k-1} \hat{f}_j \quad (2.6)$$

mit

$$\hat{f}_j = \frac{S_{j+1}^{[I-j-1]}}{S_j^{[I-j-1]}} \quad (2.7)$$

geschätzt. Die \hat{f}_j bezeichnen wir im Weiteren als klassische CL-Faktoren. Die Schätzungen für die endgültigen Schäden $C_{i,J}$ entsprechen dann $C_{i,J}^{CL}$ und die Schätzungen für die Rückstellungen sind $R_i^{CL} = C_{i,J}^{CL} - C_{i,I-i}$.

Schadenjahr i	Abwicklungsjahr j									
	0	1	...	j	$j+1$	$J-2$	$J-1$	$J=I$
0										
1										
...										
...										
i										
...										
...										
$I-2$										
$I-1$										
I										
\hat{f}_j	\hat{f}_0	\hat{f}_1	...	\hat{f}_j	\hat{f}_{J-2}	\hat{f}_{J-1}	-

Abbildung 2: Berechnung der klassischen Chain Ladder Faktoren

Die klassische CL-Methode ist grundsätzlich eine pragmatische Methode, die ohne klar definierte Modellannahmen auskommt und als Algorithmus zur Schätzung von Schadenrückstellungen aufgefasst werden kann. Ein daraus resultierender Nachteil ist, dass keine Aussagen über die Schätzgenauigkeit möglich sind. Es existieren jedoch einige Modelle, die dieser Methode zugrunde liegen und die es ermöglichen, Angaben zur Schätzgenauigkeit zu machen. Ein solches Modell, das für die folgenden Modelle dieser Arbeit von Bedeutung ist und auch die Grundidee der Chain Ladder Methode sehr gut reflektiert, ist das Modell von Mack[6]. Ein weiteres bekanntes Modell, welches für diese Arbeit jedoch nicht relevant ist, ist das Modell von Renshaw und Verrall[8]. Folgende Annahmen beschreiben das stochastische Modell von Mack, das der klassischen Chain Ladder Methode zugrunde liegt.

Modellannahmen 2.1 (Mack's Chain Ladder Modell)

M1 Zufallsvariablen $C_{i,j}$, die zu verschiedenen Schadenjahren $i \in \{0, 1, \dots, I\}$ gehören, sind unabhängig.

M2 Es gibt Konstanten $f_j > 0$ und $\sigma_j^2 > 0$, so dass für alle $i \in \{0, 1, \dots, I\}$ und für alle $j = 0, 1, \dots, J-1$ gilt:

$$E[C_{i,j+1} | C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = f_j C_{i,j} \quad (2.8)$$

$$\text{Var}(C_{i,j+1} | C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j} \quad (2.9)$$

Dieses Modell ist verteilungsfrei und trifft nur Annahmen über die bedingten ersten und zweiten Momente. Mit Hilfe dieses stochastischen Modells ist es möglich, den Standardfehler der Chain Ladder Schätzung anzugeben.

Im Folgenden ist es nützlich, die Menge der Beobachtungen bis zum Abwicklungsjahr j als

$$\mathcal{B}_j = \{C_{i,k} : i + k \leq I, k \leq j\} \subset \mathcal{D}_I \quad (2.10)$$

zu definieren. Zudem können wir von den Zufallsvariablen $C_{i,j}$ zu den individuellen Abwicklungsfaktoren

$$Y_{i,j} = C_{i,j+1}/C_{i,j} \quad (2.11)$$

wechseln. Wir können $C_{i,j} > 0$ annehmen, da bei $C_{i,j} = 0$ der Prozess auch in Mack's Modell stoppt, weil dann $E[C_{i,j+1}|C_{i,j} = 0] = 0$ und $\text{Var}[C_{i,j+1}|C_{i,j} = 0] = 0$ gilt.

Mack's Chain Ladder Annahmen (2.8) und (2.9) sind dann equivalent zu:

$$E[Y_{i,j}|C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = f_j \quad (2.12)$$

$$\text{Var}(Y_{i,j}|C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}} \quad (2.13)$$

2.2 Der bedingte erwartete quadratische Schätzfehler MSEP

Damit wir im Folgenden die Genauigkeit von Schätzern der Zufallsvariablen $C_{i,J}$ miteinander vergleichen können, definieren wir für einen auf den Beobachtungen \mathcal{D}_I basierenden Schätzer $\widehat{C}_{i,J}$ den bedingten erwarteten quadratischen Schätzfehler (Mean Squared Error of Prediction).

Definition 2.1

Der bedingte erwartete quadratische Schätzfehler von $\widehat{C}_{i,J}$ ist definiert als

$$msep(\widehat{C}_{i,J}) = E \left[\left(\widehat{C}_{i,J} - C_{i,J} \right)^2 \middle| \mathcal{D}_I \right]. \quad (2.14)$$

Falls wir den Schätzer für die entsprechende Schadenrückstellung als

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,J} - C_{i,I-i} \quad (2.15)$$

definieren, gilt

$$msep(\widehat{C}_{i,J}) = msep(\widehat{R}_i) = E \left[\left(\widehat{R}_i - R_i \right)^2 \middle| \mathcal{D}_I \right]. \quad (2.16)$$

Bemerkungen:

- Im Text verwenden wir jeweils die übliche Abkürzung MSEP mit Grossbuchstaben. In den Formeln weichen wir jedoch auf Kleinbuchstaben aus, um die Übersicht zu verbessern.

2.3 Formeln für den MSEP im klassischen CL-Modell

Eine Schätzung des bedingten erwarteten quadratischen Schätzfehlers für den klassischen Chain-Ladder Schätzer $C_{i,J}^{CL}$ ist durch den folgenden Satz gegeben:

Satz 2.2

$$\widehat{msep}(C_{i,J}^{CL}) = C_{i,I-i} \tilde{\Gamma}_{I-i} + C_{i,I-i}^2 \tilde{\Delta}_{I-i} \quad (2.17)$$

mit

$$\tilde{\Gamma}_j = \sum_{k=j}^{J-1} \left\{ \left(\prod_{m=j}^{k-1} \hat{f}_m \right) \hat{\sigma}_k^2 \prod_{n=k+1}^{J-1} (\hat{f}_n)^2 \right\} \quad (2.18)$$

$$\tilde{\Delta}_j = \prod_{k=j}^{J-1} (\hat{f}_k)^2 \sum_{k=j}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 / (\hat{f}_k)^2}{\sum_{l=0}^{I-k-1} C_{l,k}} \quad (2.19)$$

wobei ein leeres Produkt gleich 1 ist und

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2 \quad (2.20)$$

oder falls zu wenig Daten vorhanden sind (am Ende des Abwicklungsdreiecks)

$$\widehat{\sigma}_{J-1}^2 = \min \left\{ \widehat{\sigma}_{J-2}^4 / \widehat{\sigma}_{J-3}^2, \widehat{\sigma}_{J-2}^2, \widehat{\sigma}_{J-3}^2 \right\}. \quad (2.21)$$

Aus der obigen Formel folgt auch eine Schätzung für den erwarteten quadratischen Schätzfehler von $\widehat{R} = \sum_i \widehat{R}_i$, der geschätzten Gesamtrückstellung.

Korollar 2.3

$$\widehat{msep}(\widehat{R}) = \sum_{i=1}^I \widehat{msep}(C_{i,J}^{CL}) + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq I} C_{i,I-i} C_{k,I-i}^{CL} \tilde{\Delta}_{I-i}. \quad (2.22)$$

Dies sind die berühmten Formeln von Mack (1993). Die Herleitungen dazu können in [6] nachgelesen werden.

Bemerkungen:

- Die Formel (2.17) vom Satz 2.2 hat A.Gisler bereits 1992 entdeckt. Die entsprechende Herleitung mit Hilfe von Taylor-Approximationen wurde im Referat: *Die rasante Entwicklung der Mathematik in der Versicherung: Eine Zeitreise über die letzten 30 Jahre* an der Jahresversammlung 2013 der Schweizerischen Aktuarvereinigung (SAV), gezeigt.

- Diese Formeln liefern eine gute Schätzung, falls $(\hat{f}_k)^2 \gg \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\sum_{l=0}^{I-k-1} C_{l,k}}$ (für alle k). Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, findet man im Abschnitt 5 von [5] geeignetere Formeln.
- Verschiedene Ansätze zur Schätzung des MSE, sowie eine Diskussion über diese, findet man in den Artikeln [1],[7],[2] und [4]. Zum letztgenannten Artikel sollte zudem noch hinzugefügt werden, dass in diesem zum ersten Mal ein Bayes'scher Ansatz fürs Chain Ladder Modell in Betracht gezogen wird.

3 Bayes'sche Chain Ladder Methode

3.1 Die Bayes'sche Chain Ladder Methode

Für einen Bayes'schen Aufbau der Chain Ladder Methode nehmen wir an, dass die Abwicklungsfaktoren f_j , $j = 0, 1, \dots, J-1$, Realisationen von unabhängigen, positiven und reellwertigen Zufallsvariablen F_j sind. Wir können diese Zufallsvariablen als Zufallsvektor

$$\mathbf{F} = (F_0, F_1, \dots, F_{J-1})' \quad (3.1)$$

zusammenfassen. Entsprechend erhalten wir für die Abwicklungsfaktoren einen Vektor

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{J-1})' \quad (3.2)$$

als Realisation von \mathbf{F} .

Im Bayes'schen Chain Ladder Modell wird angenommen, dass bedingt, gegeben \mathbf{F} , das Chain Ladder Modell 2.1 von Mack erfüllt ist.

Modellannahmen 3.1 (Bayes'sches Chain Ladder Modell)

B1 Bedingt, gegeben \mathbf{F} , sind die Zufallsvariablen $C_{i,j}$, die zu verschiedenen Schadenjahren $i \in \{0, 1, \dots, I\}$ gehören, unabhängig.

B2 Bedingt, gegeben \mathbf{F} und $\{C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}\}$, ist die bedingte Verteilung von $Y_{i,j}$ nur von F_j und $C_{i,j}$ abhängig und es gilt:

$$E[Y_{i,j} | \mathbf{F}, C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = F_j \quad (3.3)$$

$$\text{Var}(Y_{i,j} | \mathbf{F}, C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2(F_j)}{C_{i,j}} \quad (3.4)$$

B3 Die Zufallsvariablen $\{F_0, F_1, \dots, F_{J-1}\}$ sind unabhängig und positiv.

Bemerkungen:

- Die unbedingte Verteilung von \mathbf{F} ist unabhängig von \mathcal{D}_I .
- Bedingt, gegeben \mathbf{F} , besitzt $\{C_{i,j} : j = 0, 1, \dots, J\}$ die Markov-Eigenschaft. Das heisst, die bedingte Verteilung von $C_{i,j+1}$ gegeben $\{C_{i,k} : k = 0, 1, \dots, j\}$ ist nur von der letzten Beobachtung $C_{i,j}$ abhängig. Diese Annahme ist etwas stärker als die Annahme *M2* von Mack (Modellannahmen 2.1), bei der verlangt wird, dass die ersten und zweiten Momente nur von der letzten Beobachtung $C_{i,j}$ abhängen.
- Bedingt, gegeben \mathbf{F} , gilt:

$$\{Y_{i,j} : j = 0, 1, \dots, J - 1\} \text{ sind unkorreliert und} \quad (3.5)$$

$$Y_{i,j} \text{ und } Y_{k,l} \text{ sind unabhängig für } i \neq k. \quad (3.6)$$

(3.5) lässt sich aus [6] herleiten.

- Die $Y_{i,j}$ in (3.5) sind nur unkorreliert, nicht unabhängig. Dieses Resultat stammt aus [7].

Das Ziel ist es nun, die besten Schätzer für $\{C_{i,j} : i + j > I\}$, gegeben die Beobachtungen \mathcal{D}_I , zu finden. Dazu verwenden wir den Satz von Bayes, um eine a posteriori Verteilung von \mathbf{F} , gegeben die Daten $(Y_{i,j})$, zu berechnen. Dazu nehmen wir an, dass die Verteilung der Daten, gegeben \mathbf{F} , sowie die Verteilungen der F_j 's, bekannt sind. Der folgende Satz gibt dann das Resultat für diese Berechnung an.

Um die Notation zu vereinfachen, verwenden wir für den folgenden Satz die Bezeichnung $U(f_j)$ für die Verteilungsfunktion von F_j , für alle $j = 0, 1, \dots, J-1$. Das heisst, dass wir den Buchstaben U für verschiedene Verteilungen verwenden, wobei nur das Argument f_j bestimmt, um welche Verteilungsfunktion es sich genau handelt. Analog bezeichnen wir die bedingte Verteilung der Daten, gegeben $F_j = f_j$ oder $\mathbf{F} = \mathbf{f}$, als $F_{f_j}(\cdot)$ respektive $F_{\mathbf{f}}(\cdot)$. Zum Beispiel bezeichnen wir mit $F_{f_j}(y_{i,j}|\mathcal{B}_j)$ die bedingte Verteilung von $Y_{i,j}$, gegeben $F_j = f_j$ und gegeben \mathcal{B}_j . Für $j = 0, 1, \dots, J-1$ erhalten wir zudem Spaltenvektoren $\mathbf{Y}_j = (Y_{0,j}, Y_{1,j}, \dots, Y_{I-j-1,j})'$ wobei wir eine Realisation mit $\mathbf{y}_j = (y_{0,j}, y_{1,j}, \dots, y_{I-j-1,j})'$ bezeichnen.

Satz 3.1

Unter den Modellannahmen 3.1 gilt, dass die Zufallsvariablen F_0, F_1, \dots, F_{J-1} auch a posteriori, gegeben die Beobachtungen \mathcal{D}_I , unabhängig sind und die a posteriori Verteilung

$$dU(f_0, \dots, f_{J-1} | \mathcal{D}_I) \propto \prod_{j=0}^{J-1} dU(f_j | \mathcal{D}_I) \quad (3.7)$$

besitzen.

Beweis von Satz 3.1

Aufgrund der Modellannahmen 3.1 folgt, dass

$$dF_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{J-1} | \mathcal{B}_0) = \prod_{j=0}^{J-1} \prod_{i=0}^{I-j-1} dF_{f_j}(y_{i,j} | C_{i,j}), \quad (3.8)$$

wobei $C_{i,j} = y_{i,j-1} C_{i,j-1}$ für $j \geq 1$. Für die gemeinsame a posteriori Verteilung von F_0, F_1, \dots, F_{J-1} , gegeben die Beobachtungen \mathcal{D}_j , erhalten wir mit dem Satz von Bayes

$$dU(f_0, \dots, f_{J-1} | \mathcal{D}_I) \propto \prod_{j=0}^{J-1} \left\{ \prod_{i=0}^{I-j-1} dF_{f_j}(y_{i,j} | C_{i,j}) dU(f_j) \right\} \quad (3.9)$$

$$\propto \prod_{j=0}^{J-1} dU(f_j | \mathcal{D}_I). \quad (3.10)$$

□

Definition 3.2

Ein Schätzer \hat{Z} einer Zufallsvariablen Z heisst mindestens gleich gut wie ein Schätzer \tilde{Z} , falls

$$E \left[\left(\hat{Z} - Z \right)^2 \right] \leq E \left[\left(\tilde{Z} - Z \right)^2 \right]. \quad (3.11)$$

Die Definition bedeutet zudem, dass wir die erwartete quadratische Abweichung als Optimierungskriterium verwenden. Der beste Schätzer von Z , basierend auf einem Zufallsvektor von Beobachtungen \mathbf{X} , ist dann gegeben durch

$$Z^{Bayes} = E[Z | \mathbf{X}]. \quad (3.12)$$

Dies ist ein bekanntes Resultat aus der Bayes-Statistik, siehe z.B. [3], Kapitel 2. Ausserdem gilt

$$Z^{Bayes} = \arg \min_{\hat{Z}} E \left[\left(\hat{Z} - Z \right)^2 \middle| \mathbf{X} \right]. \quad (3.13)$$

Das heisst, der Bayes-Schätzer minimiert auch die bedingte quadratische Abweichung. Aus diesem Grunde und wegen (2.14) der Definition 2.1 folgt, dass

$$C_{i,J}^{Bayes} = E[C_{i,J} | \mathcal{D}_I] \quad (3.14)$$

den bedingten erwarteten quadratischen Schätzfehler $msep(\widehat{C}_{i,J})$ minimiert.

Satz 3.3

Mit den Modellannahmen 3.1 gilt

$$C_{i,J}^{Bayes} = C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} F_j^{Bayes} \quad (3.15)$$

für $J > I - i$, wobei F_j^{Bayes} der Bayes-Schätzer von F_j ist.

Bemerkungen:

- Die entsprechenden Schätzer für die Rückstellungen sind gegeben durch

$$R_i^{Bayes} = C_{i,J}^{Bayes} - C_{i,I-i}. \quad (3.16)$$

Beweis von Satz 3.3

Aus der a posteriori Unabhängigkeit der F_j , gegeben \mathcal{D}_I , siehe Satz 3.1, folgt dass die $Y_{i,j}, j = I - i, \dots, J - 1$, bedingt unkorreliert sind. Also gilt

$$\begin{aligned} C_{i,J}^{Bayes} &= E \left[C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} Y_{i,j} \middle| \mathcal{D}_I \right] \\ &= C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} E[Y_{i,j} | \mathcal{D}_I] \\ &= C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} E[E[Y_{i,j} | \mathbf{F}, \mathcal{D}_I] | \mathcal{D}_I] \\ &= C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} E[F_j | \mathcal{D}_I] \\ &= C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} F_j^{Bayes}. \end{aligned}$$

□

3.2 Formeln für den MSEP im Bayes'schen CL-Modell

Als nächstes wollen wir auch für dieses Modell (Modell 3.1) eine Formel für den Rückstellungsfehler angeben. Auch hier gilt wieder

$$msep\left(\widehat{C}_{i,J}^{Bayes}\right) = msep\left(\widehat{R}_i^{Bayes}\right). \quad (3.17)$$

Satz 3.4

Der bedingte erwartete quadratische Schätzfehler der Bayes-Rückstellung des Schadenjahres i ist gegeben als

$$\begin{aligned} msep\left(R_i^{Bayes}\right) &= E\left[\left(C_{i,J}^{Bayes} - C_{i,J}\right)^2 \middle| \mathcal{D}_I\right] \\ &= C_{i,I-i}\Gamma_{I-i} + C_{i,I-i}^2\Delta_{I-i}^B \end{aligned} \quad (3.18)$$

mit

$$\Gamma_j = \sum_{k=j}^{J-1} \left\{ \left(\prod_{m=j}^{k-1} F_m^{Bayes} \right) E\left[\sigma_k^2(F_k) \middle| \mathcal{D}_I\right] \prod_{n=k+1}^{J-1} E\left[F_n^2 \middle| \mathcal{D}_I\right] \right\} \quad (3.19)$$

$$\Delta_j^B = \text{Var}\left(\prod_{k=j}^{J-1} F_k \middle| \mathcal{D}_I\right). \quad (3.20)$$

Den Beweis des Satzes findet man in [5].

4 Credibility für die Chain Ladder Methode

4.1 Das Credibility CL-Modell

In der Versicherungspraxis ist es normalerweise so, dass die Verteilungen der F_j , sowie die bedingten Verteilungen der $C_{i,j}$ gegeben \mathbf{F} , unbekannt sind. Aus diesem Grunde ist es nicht möglich, die Bayes-Schätzer F_j^{Bayes} zu berechnen. Die Credibility Theorie entschärft dieses Problem, da für die entsprechenden Schätzer nur noch die ersten und zweiten Momente der Verteilungen bekannt sein müssen. Es wird angenommen, dass diese ersten beiden Momente für alle betrachteten Zufallsvariablen existieren und endlich sind. Wenn ein Portfolio von vergleichbaren Abwicklungsdreiecken besteht, können diese Momente aus den kollektiven Daten geschätzt werden.

Wenn wir in (3.15) die F_j^{Bayes} durch die Credibility-Schätzer F_j^{Cred} ersetzen, erhalten wir den auf Credibility basierenden Schätzer.

Definition 4.1

Der auf Credibility basierende Schätzer des endgültigen Schaden $C_{i,J}$, gegeben \mathcal{D}_I , ist definiert als

$$C_{i,J}^{(Cred)} = C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} F_j^{Cred}. \quad (4.1)$$

Bemerkungen:

- Der Schätzer $C_{i,J}^{(Cred)}$ ist kein Credibility-Schätzer, da Credibility-Schätzer lineare Funktionen der Beobachtungen sein müssen. Aufgrund der multiplikativen Struktur im Chain Ladder Kontext wäre es jedoch nicht sinnvoll, sich auf lineare Schätzer für $C_{i,J}$ zu beschränken. Stattdessen schreiben wir *Cred* in Klammern und verwenden einen Schätzer auf Basis der Credibility-Schätzer F_j^{Cred} .
- Der entsprechende Rückstellungsschätzer ist definiert als

$$R_i^{(Cred)} = C_{i,J}^{(Cred)} - C_{i,I-i}.$$

Um diesen auf Credibility basierenden Schätzer $C_{i,J}^{(Cred)}$ zu berechnen, müssen wir die Credibility-Schätzer F_j^{Cred} kennen. Dazu dient die folgende Definition.

Definition 4.2

$$F_j^{Cred} = \arg \min_{\{\hat{F}_j: \hat{F}_j = a^{(j)} + \sum_{i=0}^{I-j-1} a_i^{(j)} Y_{i,j}\}} E \left[\left(\hat{F}_j - F_j \right)^2 \middle| \mathcal{B}_j \right]. \quad (4.2)$$

Bemerkungen:

- Der Schätzer F_j^{Cred} basiert nur auf den beobachteten individuellen Abwicklungsfaktoren $Y_{i,j}$, $i = 0, \dots, I - j - 1$, da dies die einzigen Beobachtungen des Y -Dreiecks sind, die Informationen über F_j enthalten [5].

- Man kann die Gleichung (4.2) auch als orthogonale Projektion im Hilbertraum \mathcal{L}^2 auffassen. Dann ist $F_j^{Cred} = Pro(F_j|L(\mathbf{Y}_j, 1))$, wobei $L(\mathbf{Y}_j, 1) = \left\{ \widehat{F}_j : \widehat{F}_j = a^{(j)} + \sum_{i=0}^{I-j-1} a_i^{(j)} Y_{i,j} \right\}$ ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{L}^2 ist, der aus den Funktionen besteht, die linear in $Y_{i,j}, i = 0, \dots, I - j - 1$ sind. Mehr dazu findet man in [3], Kapitel 3.

Im Folgenden verwenden wir für die Anzahl der vergleichbaren Abwicklungsdreiecke die Variable G . Dies führt bei allen Zufallsvariablen, die zu einem spezifischen Abwicklungsdreieck gehören, zu einem zusätzlichen Index g , welcher einen Wert aus $\{1, \dots, G\}$ annehmen kann. Zum Beispiel bezeichnet $Y_{i,j}^{(g)}$ den individuellen Abwicklungsfaktor $Y_{i,j}$, der zum Abwicklungsdreieck, respektive zum Risiko, g gehört. Falls aus dem Kontext ersichtlich ist, welche Zufallsvariable gemeint ist, verzichten wir auf diesen zusätzlichen Index, was bei den Formeln für die inhomogenen Credibility-Schätzern normalerweise der Fall ist.

Zudem verwenden wir für die kumulierten Schadenzahlungen, dort wo sie als Gewichte erscheinen und als bekannt angenommen werden, die Notation $C_{i,j} = w_{i,j}$. Dies erleichtert es, die Resultate mit denen aus [3] zu vergleichen, da dort auch die Variable w für Gewichte verwendet wird. Zudem verwenden wir auch die in [3] oft gebrauchte Abkürzung

$$w_{\bullet,j} = \sum_{i=0}^{I-j-1} w_{i,j}. \quad (4.3)$$

Bemerkungen:

- Die Notation mit der "Kugel" • verwenden wir auch für andere Variablen. Eine Variable mit einer "Kugel" • anstelle einer Indexvariablen bedeutet, dass es sich um die Summe über die entsprechenden Indizes handelt.

Der nächste Satz gibt uns nun eine explizite Formel für den Credibility-Schätzer F_j^{Cred} .

Satz 4.3

i) Der (inhomogene) Credibility-Schätzer für den Chain Ladder Faktor F_j ist gegeben durch

$$F_j^{Cred} = \alpha_j Y_j + (1 - \alpha_j) f_j \quad (4.4)$$

mit

$$Y_j = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{w_{i,j}}{w_{\bullet,j}} Y_{i,j} \quad (4.5)$$

$$\alpha_j = \frac{w_{\bullet,j}}{w_{\bullet,j} + \frac{\sigma_j^2}{\tau_j^2}} \quad (4.6)$$

und den strukturellen Parametern

$$f_j = E[F_j] \quad (4.7)$$

$$\sigma_j^2 = E[\sigma_j^2(F_j)] \text{ (wobei } \sigma_j^2(F_j) \text{ in (3.4) definiert wurde)} \quad (4.8)$$

$$\tau_j^2 = \text{Var}(F_j). \quad (4.9)$$

ii) Der erwartete quadratische Schätzfehler von F_j^{Cred} ist gegeben durch

$$mse(F_j^{Cred}) = E[(F_j^{Cred} - F_j)^2] = \tau_j^2(1 - \alpha_j). \quad (4.10)$$

Beweis von Satz 4.3

Die Zufallsvariablen $Y_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{w_{i,j}}, i = 0, \dots, I - j - 1$ erfüllen die Annahmen des Bühlmann-Straub Modells (Abschnitt 4.2 in [3]). Die Beweise der Formeln können demnach aus [3], Kapitel 4, übernommen werden. \square

Bemerkungen:

- Das Bühlmann-Straub Modell wird für jedes Abwicklungsjahr $k = 0, \dots, J - 1$ separat angewendet.
- Y_j entspricht genau dem klassischen CL-Faktor $\hat{f}_j = \frac{S_j^{[I-j-1]}}{S_j^{[I-j-1]}}$, da $Y_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{w_{i,j}}$ gilt.
- Die strukturellen Parameter f_j, σ_j^2 und τ_j^2 können entweder von Experten festgelegt oder aus dem Datenkollektiv geschätzt werden. Schätzer für diese Parameter folgen weiter unten.

- Die Parameter σ_j^2 und τ_j^2 werden oft auch zum Credibility Koeffizienten $\kappa_j = \frac{\sigma_j^2}{\tau_j^2}$ zusammengefasst.

Falls ein ganzes Portfolio von vergleichbaren Abwicklungsdreiecken vorhanden ist, können wir auch die homogenen Credibility-Schätzer $F_j^{(hom),(g)}$ verwenden, um die entsprechenden Schätzer im Chain Ladder Modell zu bilden. Die homogenen Credibility-Schätzer haben bereits einen Schätzer für f_j integriert und basieren deshalb auf allen Daten des Kollektivs und nicht nur auf den individuellen Daten des entsprechenden Risikos, wie es bei den inhomogenen Schätzern der Fall ist. Deshalb wird der zusätzliche Index g im homogenen Kontext häufiger benötigt, um klar zu stellen, von welchem Risiko die Variablen stammen.

Bemerkungen:

- Die entsprechenden Schätzer werden mit $C_{i,J}^{(hom),(g)}$ und $R_i^{(hom),(g)}$ bezeichnet.

Satz 4.4

i) Der (homogene) Credibility-Schätzer für den Chain Ladder Faktor $F_j^{(g)}$ ist gegeben durch

$$F_j^{(hom),(g)} = \alpha_j^{(g)} Y_j^{(g)} + (1 - \alpha_j^{(g)}) \widehat{f}_j \quad (4.11)$$

mit

$$Y_j^{(g)} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{w_{i,j}^{(g)}}{w_{\bullet,j}^{(g)}} Y_{i,j}^{(g)} \quad (4.12)$$

$$\alpha_j^{(g)} = \frac{w_{\bullet,j}^{(g)}}{w_{\bullet,j}^{(g)} + \frac{\sigma_j^2}{\tau_j^2}} \quad (4.13)$$

$$\widehat{f}_j = \sum_{g=1}^G \frac{\alpha_j^{(g)}}{\alpha_j^{(\bullet)}} Y_j^{(g)} \quad (4.14)$$

$$\text{(respektive } \widehat{f}_j = \bar{Y}_j = \sum_{g=1}^G \frac{w_{\bullet,j}^{(g)}}{w_{\bullet,j}^{(\bullet)}} Y_j^{(g)} \text{, falls alle } \alpha_j^{(g)} = 0 \text{ sind)} \quad (4.15)$$

und den strukturellen Parametern

$$\sigma_j^2 = E [\sigma_j^2(F_j)] \text{ (wobei } \sigma_j^2(F_j) \text{ in (3.4) definiert wurde)} \quad (4.16)$$

$$\tau_j^2 = \text{Var}(F_j). \quad (4.17)$$

ii) Der erwartete quadratische Schätzfehler von $F_j^{(hom),(g)}$ ist gegeben durch

$$mse \left(F_j^{(hom),(g)} \right) = E \left[\left(F_j^{(hom),(g)} - F_j^{(g)} \right)^2 \right] \quad (4.18)$$

$$= \tau_j^2 \left(1 - \alpha_j^{(g)} \right) + \frac{\tau_j^2}{\alpha_j^{(\bullet)}} \left(1 - \alpha_j^{(g)} \right)^2. \quad (4.19)$$

Beweis von Satz 4.4

Die Zufallsvariablen $Y_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{w_{i,j}}$, $i = 0, \dots, I - j - 1$ erfüllen die Annahmen des Bühlmann-Straub Modells (Abschnitt 4.2 in [3]). Die Beweise der Formeln können demnach aus [3], Kapitel 4, übernommen werden. \square

Wie bereits erwähnt, können auch die strukturellen Parameter σ_j^2 und τ_j^2 aus den kollektiven Daten geschätzt werden. Im nächsten Satz werden die Schätzer aus [3] angegeben, wo man auch Erläuterungen sowie die Herleitungen zu den Schätzern findet.

Satz 4.5

i) Der Schätzer für σ_j^2 ist gegeben durch

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G \frac{1}{I - j - 1} \sum_{i=0}^{I-j-1} w_{i,j}^{(g)} \left(Y_{i,j}^{(g)} - Y_j^{(g)} \right)^2 \quad (4.20)$$

$$= \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G \hat{\sigma}_j^{2(g)}. \quad (4.21)$$

ii) Der Schätzer für τ_j^2 ist gegeben durch

$$\hat{\tau}_j^2 = \max \left(\hat{\tau}_j^2, 0 \right) \quad (4.22)$$

wobei

$$\hat{\tau}_j^2 = c \cdot \left\{ \frac{G}{G-1} \sum_{g=1}^G \frac{w_{\bullet,j}^{(g)}}{w_{\bullet,j}^{(\bullet)}} \left(Y_j^{(g)} - \bar{Y}_j \right)^2 - \frac{G \cdot \hat{\sigma}_j^2}{w_{\bullet,j}^{(\bullet)}} \right\} \quad (4.23)$$

mit

$$c = \frac{G-1}{G} \left\{ \sum_{g=1}^G \frac{w_{\bullet,j}^{(g)}}{w_{\bullet,j}^{(\bullet)}} \left(1 - \frac{w_{\bullet,j}^{(g)}}{w_{\bullet,j}^{(\bullet)}} \right) \right\}^{-1}. \quad (4.24)$$

Bemerkungen:

- Die Schätzer $\hat{\sigma}_j^{2(g)}$ entsprechen den Schätzern (2.20) von Mack.

4.2 Formeln für den MSEP im Credibility CL-Modell

Für die auf Credibility basierenden Rückstellungsschätzer $R_i^{(Cred)}$ und $R_i^{(hom),(g)}$ können wir wieder Schätzungen für die bedingten erwarteten quadratischen Schätzfehler angeben. Zudem geben wir auch Formeln für die MSEP von kompletten Abwicklungsdreiecken an und leiten eine Approximation für den MSEP eines gesamten Portfolios von ähnlichen Abwicklungsdreiecken her, was für den auf homogenen Credibility-Schätzern basierenden Rückstellungsschätzer von Bedeutung ist.

Satz 4.6

Der MSEP von $R_i^{(Cred)}$ kann durch

$$\widehat{msep}\left(R_i^{(Cred)}\right) = C_{i,I-i}\Gamma_{I-i}^* + C_{i,I-i}^2\Delta_{I-i}^* \quad (4.25)$$

geschätzt werden, wobei

$$\Gamma_j^* = \sum_{k=j}^{J-1} \left\{ \left(\prod_{m=j}^{k-1} F_m^{Cred} \right) \widehat{\sigma}_k^2 \prod_{n=k+1}^{J-1} \left((F_n^{Cred})^2 + \widehat{\tau}_n^2(1 - \widehat{\alpha}_n) \right) \right\} \quad (4.26)$$

$$\Delta_j^* = \prod_{k=j}^{J-1} \left((F_k^{Cred})^2 + \widehat{\tau}_k^2(1 - \widehat{\alpha}_k) \right) - \prod_{k=j}^{J-1} (F_k^{Cred})^2. \quad (4.27)$$

Dieses Resultat entspricht dem Theorem 4.4 aus [5], wo man auch die Herleitung zu der Formel findet. Zudem findet man dort auch die Herleitung für die folgende Formel, welche eine Schätzung des $msep(R^{Cred})$ angibt, wobei

$$R^{(Cred)} = \sum_{i=1}^I R_i^{(Cred)} \quad (4.28)$$

die geschätzte Rückstellungssumme eines gesamten Abwicklungsdreiecks ist. Dieses Korollar entspricht dem Corollary 4.5 aus [5].

Korollar 4.7

$$\widehat{msep}\left(R^{(Cred)}\right) = \sum_{i=1}^I \widehat{msep}\left(R_i^{(Cred)}\right) + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq I} C_{i,I-i} C_{k,I-i}^{(Cred)} \Delta_{I-i}^* \quad (4.29)$$

wobei $\widehat{msep}\left(R_i^{(Cred)}\right)$ und Δ_j^* gleich sind, wie im Satz 4.6.

Bemerkungen:

- Für den Term $\widehat{\tau}_j^2 (1 - \widehat{\alpha}_j)$ in (4.26) und (4.27) wird in [5] die Schreibweise $\frac{\widehat{\alpha}_j \widehat{\sigma}_j^2}{w_{\bullet,j}}$ verwendet.

Für die entsprechenden Schätzfehler von $R_i^{(hom),(g)}$ existieren analoge Formeln. Dort wo die Variablen jeweils vom selben Risiko stammen, wurde auch hier zu Gunsten einer besseren Lesbarkeit oft auf den zusätzlichen Index g verzichtet.

Satz 4.8

$$\widehat{msep} \left(R_i^{(hom),(g)} \right) = C_{i,I-i} \Gamma_{I-i}^{**} + C_{i,I-i}^2 \Delta_{I-i}^{**} \quad (4.30)$$

mit

$$\Gamma_j^{**} = \sum_{k=j}^{J-1} \left\{ \left(\prod_{m=j}^{k-1} F_m^{(hom)} \right) \widehat{\sigma}_k^2 \prod_{n=k+1}^{J-1} \left((F_n^{(hom)})^2 + \widehat{\tau}_n^2 (1 - \widehat{\alpha}_n) + \frac{\widehat{\tau}_n^2}{\widehat{\alpha}_n^{(\bullet)}} (1 - \widehat{\alpha}_n)^2 \right) \right\} \quad (4.31)$$

$$\Delta_j^{**} = \prod_{k=j}^{J-1} \left((F_k^{(hom)})^2 + \widehat{\tau}_k^2 (1 - \widehat{\alpha}_k) + \frac{\widehat{\tau}_k^2}{\widehat{\alpha}_k^{(\bullet)}} (1 - \widehat{\alpha}_k)^2 \right) - \prod_{k=j}^{J-1} (F_k^{(hom)})^2. \quad (4.32)$$

Die Herleitung dieser Formel ist identisch mit jener der Formel (4.25), ausser dass die F_j^{Cred} durch die homogenen $F_j^{(hom)}$ ausgetauscht wurden und der erwartete quadratische Schätzfehler von $F_j^{(hom)}$ verwendet wurde, welcher

dem Term $\widehat{\tau}_j^2 (1 - \widehat{\alpha}_j) + \frac{\widehat{\tau}_j^2}{\widehat{\alpha}_j^{(\bullet)}} (1 - \widehat{\alpha}_j)^2$ entspricht. Auf die gleiche Weise erhält

man auch die nächste Formel, welche eine Schätzung des $msep(R^{(hom),(g)})$ angibt, wobei

$$R^{(hom),(g)} = \sum_{i=1}^I R_i^{(hom),(g)} \quad (4.33)$$

wieder die geschätzte Rückstellungssumme eines kompletten Abwicklungsdreiecks ist.

Korollar 4.9

$$\widehat{msep}(R^{(hom),(g)}) = \sum_{i=1}^I \widehat{msep}(R_i^{(hom),(g)}) + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq I} C_{i,I-i} C_{k,I-i}^{(hom)} \Delta_{I-i}^{**} \quad (4.34)$$

wobei $\widehat{msep}(R_i^{(hom),(g)})$ und Δ_j^{**} gleich sind, wie im Satz 4.8.

Wenn man die Rückstellungen eines gesamten Portfolios berechnet, interessiert einen oft auch die Schätzgenauigkeit für das Total, das heisst, von der Summe aller Risiken. Im homogenen Fall sind die Schätzer der verschiedenen Risiken nicht mehr unkorreliert, da die strukturellen Parameter $f_j, j = 1, \dots, J-1$ mit den kollektiven Daten geschätzt werden. Dies führt zu einem zusätzlichen Term im bedingten erwarteten quadratischen Schätzfehler des geschätzten Rückstellungstotals

$$R_{Total}^{(hom)} = \sum_{g=1}^G R^{(hom),(g)}. \quad (4.35)$$

Für diesen Schätzfehler wollen wir eine Approximation herleiten, indem wir den Gesamtfehler in die Summe der individuellen Fehler und in den oben erwähnten zusätzlichen Term aufteilen. Die zweite Gleichung wird ersichtlich, wenn wir uns die zweite binomische Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ in Erinnerung rufen:

$$\begin{aligned}
& msep\left(R_{Total}^{(hom)}\right) \\
&= E \left[\left(\sum_{g=1}^G R^{(hom),(g)} - \sum_{g=1}^G R^{(g)} \right)^2 \middle| \mathcal{D} \right] \\
&= E \left[\sum_{g=1}^G (R^{(hom),(g)})^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq G} R^{(hom),(i)} R^{(hom),(k)} \right. \\
&\quad \left. - 2 \sum_{1 \leq i, k \leq G} R^{(hom),(i)} R^{(k)} + \sum_{g=1}^G (R^{(g)})^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq G} R^{(i)} R^{(k)} \middle| \mathcal{D} \right] \\
&= E \left[\sum_{g=1}^G (R^{(hom),(g)} - R^{(g)})^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq G} (R^{(hom),(i)} - R^{(i)}) (R^{(hom),(k)} - R^{(k)}) \middle| \mathcal{D} \right] \\
&= \sum_{g=1}^G msep(R^{(hom),(g)}) \\
&\quad + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq G} E [(R^{(hom),(i)} - R^{(i)}) (R^{(hom),(k)} - R^{(k)}) | \mathcal{D}]
\end{aligned}$$

Den zusätzlichen Term müssen wir noch weiter vereinfachen.

Dazu betrachten wir die Summanden einzeln:

$$\begin{aligned}
& E \left[(R^{(hom),(i)} - R^{(i)}) (R^{(hom),(k)} - R^{(k)}) \mid \mathcal{D} \right] \\
&= E \left[\left(\sum_{l=0}^I C_{l,J}^{(hom),(i)} - \sum_{l=0}^I C_{l,J}^{(i)} \right) \left(\sum_{m=0}^I C_{m,J}^{(hom),(k)} - \sum_{m=0}^I C_{m,J}^{(k)} \right) \mid \mathcal{D} \right] \\
&= \sum_{0 \leq l, m \leq I} E \left[(C_{l,J}^{(hom),(i)} - C_{l,J}^{(i)}) (C_{m,J}^{(hom),(k)} - C_{m,J}^{(k)}) \mid \mathcal{D} \right] \\
&= \sum_{0 \leq l, m \leq I} \left(E \left[\text{Cov} (C_{l,J}^{(i)}, C_{m,J}^{(k)} \mid \mathbf{F}, \mathcal{D}) \mid \mathcal{D} \right] \right. \\
&\quad \left. + E \left[(C_{l,J}^{(hom),(i)} - E [C_{l,J}^{(i)} \mid \mathbf{F}, \mathcal{D}]) (C_{m,J}^{(hom),(k)} - E [C_{m,J}^{(k)} \mid \mathbf{F}, \mathcal{D}]) \mid \mathcal{D} \right] \right) \\
&= \sum_{0 \leq l, m \leq I} E \left[(C_{l,J}^{(hom),(i)} - E [C_{l,J}^{(i)} \mid \mathbf{F}, \mathcal{D}]) (C_{m,J}^{(hom),(k)} - E [C_{m,J}^{(k)} \mid \mathbf{F}, \mathcal{D}]) \mid \mathcal{D} \right]
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt, da die Zufallsvariablen $C_{l,J}^{(i)}$ und $C_{m,J}^{(k)}$ unabhängig sind, da $i < k$ gilt und sie deshalb von verschiedenen Risiken stammen. Auch hier betrachten wir nun wieder die einzelnen Summanden und verwenden die folgende Taylorentwicklung um die Zufallsvariablen F_j :

$$\begin{aligned}
C_{i,J}^{(hom)} - E[C_{i,J} \mid \mathbf{F}, \mathcal{D}] &= C_{i,I-i} \left(\prod_{j=I-i}^{J-1} F_j^{(hom)} - \prod_{j=I-i}^{J-1} F_j \right) \\
&\approx C_{i,I-i} \left(\prod_{j=I-i}^{J-1} F_j + \sum_{j=I-i}^{J-1} (F_j^{(hom)} - F_j) \prod_{\substack{k=I-i \\ k \neq j}}^{J-1} F_k - \prod_{j=I-i}^{J-1} F_j \right) \\
&= C_{i,I-i} \left(\sum_{j=I-i}^{J-1} (F_j^{(hom)} - F_j) \prod_{\substack{k=I-i \\ k \neq j}}^{J-1} F_k \right)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Mit dieser Taylorentwicklung erhalten wir

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(C_{l,J}^{(hom),(i)} - E \left[C_{l,J}^{(i)} | \mathbf{F}, \mathcal{D} \right] \right) \left(C_{m,J}^{(hom),(k)} - E \left[C_{m,J}^{(k)} | \mathbf{F}, \mathcal{D} \right] \right) | \mathcal{D} \right] \\
& \approx E \left[\left(C_{l,I-l}^{(i)} \sum_{j=I-l}^{J-1} \left(F_j^{(hom),(i)} - F_j^{(i)} \right) \prod_{\substack{n=I-l \\ n \neq j}}^{J-1} F_n^{(i)} \right) \right. \\
& \quad \cdot \left. \left(C_{m,I-m}^{(k)} \sum_{h=I-m}^{J-1} \left(F_h^{(hom),(k)} - F_h^{(k)} \right) \prod_{\substack{p=I-m \\ p \neq h}}^{J-1} F_p^{(k)} \right) \middle| \mathcal{D} \right] \\
& = C_{l,I-l}^{(i)} C_{m,I-m}^{(k)} \prod_{n=I-l}^{J-1} F_n^{Bayes(i)} \prod_{p=I-m}^{J-1} F_p^{Bayes(k)} \\
& \quad \cdot \sum_{j=I-l}^{J-1} \sum_{h=I-m}^{J-1} \frac{1}{F_j^{Bayes(i)} F_h^{Bayes(k)}} E \left[\left(F_j^{(hom),(i)} - F_j^{(i)} \right) \left(F_h^{(hom),(k)} - F_h^{(k)} \right) | \mathcal{D} \right] \\
& \simeq C_{l,I-l}^{(i)} C_{m,I-m}^{(k)} \prod_{n=I-l}^{J-1} F_n^{Bayes(i)} \prod_{p=I-m}^{J-1} F_p^{Bayes(k)} \\
& \quad \cdot \sum_{j=I-l}^{J-1} \sum_{h=I-m}^{J-1} \frac{1}{F_j^{Bayes(i)} F_h^{Bayes(k)}} E \left[\left(F_j^{(hom),(i)} - F_j^{(i)} \right) \left(F_h^{(hom),(k)} - F_h^{(k)} \right) \right] \\
& = C_{l,I-l}^{(i)} C_{m,I-m}^{(k)} \prod_{n=I-l}^{J-1} F_n^{Bayes(i)} \prod_{p=I-m}^{J-1} F_p^{Bayes(k)} \\
& \quad \cdot \sum_{j=\max(I-l, I-m)}^{J-1} \frac{1}{F_j^{Bayes(i)} F_j^{Bayes(k)}} E \left[\left(F_j^{(hom),(i)} - F_j^{(i)} \right) \left(F_j^{(hom),(k)} - F_j^{(k)} \right) \right].
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung haben wir verwendet, dass

$$E \left[\left(F_j^{(hom),(i)} - F_j^{(i)} \right) \left(F_h^{(hom),(k)} - F_h^{(k)} \right) \right] = 0, \text{ für } j \neq h. \quad (4.37)$$

Für $E \left[\left(F_j^{(hom),(i)} - F_j^{(i)} \right) \left(F_j^{(hom),(k)} - F_j^{(k)} \right) \right]$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(F_j^{(hom),(i)} - F_j^{(i)} \right) \left(F_j^{(hom),(k)} - F_j^{(k)} \right) \right] \\
&= E \left[\left(F_j^{Cred,(i)} + \left(1 - \alpha_j^{(i)} \right) \left(\widehat{f}_j - f_j \right) - F_j^{(i)} \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(F_j^{Cred,(k)} + \left(1 - \alpha_j^{(k)} \right) \left(\widehat{f}_j - f_j \right) - F_j^{(k)} \right) \right] \\
&= \left(1 - \alpha_j^{(i)} \right) \left(1 - \alpha_j^{(k)} \right) E \left[\left(\widehat{f}_j - f_j \right)^2 \right] \\
&= \left(1 - \alpha_j^{(i)} \right) \left(1 - \alpha_j^{(k)} \right) E \left[\left(\sum_{g=1}^G \frac{\alpha_j^{(g)}}{\alpha_j^{(\bullet)}} \left(Y_j^{(g)} - f_j \right) \right)^2 \right] \\
&= \left(1 - \alpha_j^{(i)} \right) \left(1 - \alpha_j^{(k)} \right) \sum_{g=1}^G \left(\frac{\alpha_j^{(g)}}{\alpha_j^{(\bullet)}} \right)^2 E \left[\left(Y_j^{(g)} - f_j \right)^2 \right] \\
&= \left(1 - \alpha_j^{(i)} \right) \left(1 - \alpha_j^{(k)} \right) \sum_{g=1}^G \left(\frac{\alpha_j^{(g)}}{\alpha_j^{(\bullet)}} \right)^2 \left(E \left[\overbrace{\text{Var} \left(Y_j^{(g)} \mid \mathbf{F} \right)}^{\substack{\sigma_j^2(F_j) \\ = w_{\bullet,j}^{(g)}}} \right] + \text{Var} \left(\overbrace{E \left[Y_j^{(g)} \mid \mathbf{F} \right]}^{=F_j} \right) \right) \\
&= \left(1 - \alpha_j^{(i)} \right) \left(1 - \alpha_j^{(k)} \right) \sum_{g=1}^G \left(\frac{\alpha_j^{(g)}}{\alpha_j^{(\bullet)}} \right)^2 \left(\frac{\sigma_j^2}{w_{\bullet,j}^{(g)}} + \tau_j^2 \right) \\
&= \left(1 - \alpha_j^{(i)} \right) \left(1 - \alpha_j^{(k)} \right) \sum_{g=1}^G \left(\frac{\alpha_j^{(g)}}{\alpha_j^{(\bullet)}} \right)^2 \overbrace{\left(\frac{w_{\bullet,j}^{(g)} + \frac{\sigma_j^2}{\tau_j^2}}{w_{\bullet,j}^{(g)}} \right)}^{=(\alpha_j^{(g)})^{-1}} \tau_j^2 \\
&= \left(1 - \alpha_j^{(i)} \right) \left(1 - \alpha_j^{(k)} \right) \frac{\tau_j^2}{\alpha_j^{(\bullet)}}.
\end{aligned}$$

Wenn wir alle diese Terme wieder zusammensetzen und für die Parameter die entsprechenden Schätzungen einsetzen, wobei die $F_j^{Bayes(g)}$ wieder durch die $F_j^{(hom),(g)}$ geschätzt werden, erhalten wir die folgende Formel:

Satz 4.10

$$\widehat{msep} \left(R_{Total}^{(hom)} \right) = \sum_{g=1}^G \widehat{msep} \left(R^{(hom),(g)} \right) + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq G} \sum_{l=0}^I \sum_{m=0}^I C_{l,J}^{(hom),(i)} C_{m,J}^{(hom),(k)} \Delta_{(i,k,l,m)} \quad (4.38)$$

mit

$$\Delta_{(i,k,l,m)} = \sum_{j=\max(I-l, I-m)}^{J-1} \frac{1}{F_j^{(hom),(i)} F_j^{(hom),(k)}} \left(1 - \widehat{\alpha}_j^{(i)} \right) \left(1 - \widehat{\alpha}_j^{(k)} \right) \frac{\widehat{\tau}_j^2}{\widehat{\alpha}_j^{(\bullet)}}. \quad (4.39)$$

Bemerkungen:

- Mit \mathcal{D} meinen wir alle Daten von allen Abwicklungsdreiecken und mit \mathbf{F} meinen wir alle Zufallsvektoren.
- Im klassischen sowie im (inhomogenen) Credibility Chain Ladder Modell kommt kein zusätzlicher Term dazu. Es gilt

$$msep \left(R_{Total}^{Cred} \right) = \sum_{g=1}^G msep \left(R^{Cred,(g)} \right). \quad (4.40)$$

5 Multidimensionale Credibility für die Chain Ladder Methode

5.1 Das multidimensionale Credibility CL-Modell

Für das gewöhnliche Credibility Chain Ladder Modell wird angenommen, dass die zu schätzenden Abwicklungsfaktoren F_j unabhängig sind (**B3** der Modellannahmen 3.1). Man schätzt die Faktoren deshalb für jedes Abwicklungsjahr separat. In der Praxis ist diese Unabhängigkeitsannahme normalerweise nicht begründet. Man kann also anstelle der Unabhängigkeitsannahme auch eine a priori Abhängigkeit der Abwicklungsfaktoren ins Modell einbauen. Dies führt dazu, dass dann alle Abwicklungsfaktoren simultan geschätzt werden müssen. Dazu kann man die Abwicklungsfaktoren zu einem Abwicklungsvektor

$$\mathbf{F} = (F_0, F_1, \dots, F_{J-1}) \quad (5.1)$$

zusammenfassen und mit Hilfe von multidimensionaler Credibility schätzen. Der entsprechende Schätzer ist durch den folgenden Satz gegeben:

Satz 5.1

i) *Der multidimensionale Credibility-Schätzer von dem Abwicklungsvektor \mathbf{F} ist gegeben durch*

$$\mathbf{F}^{MD} = A\mathbf{B} + (I - A)\mathbf{f} \quad (5.2)$$

mit

$$\mathbf{B} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{J-1}) \quad (5.3)$$

wobei wieder $Y_j = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{w_{i,j}}{w_{\bullet,j}} Y_{i,j}$ gilt, und

$$A = T(T + S)^{-1} \quad (5.4)$$

sowie den strukturellen Parametern

$$\mathbf{f} = E[\mathbf{F}] \quad (5.5)$$

$$S = E[\Sigma(\mathbf{F})] = E[\text{Cov}(\mathbf{B}, \mathbf{B}' | \mathbf{F})] \quad (5.6)$$

$$T = \text{Cov}(\mathbf{F}, \mathbf{F}'). \quad (5.7)$$

ii) *Die erwartete quadratische Schätzfehlermatrix von \mathbf{F}^{MD} ist gegeben durch*

$$Q^{MD} = E[(\mathbf{F}^{MD} - \mathbf{F})(\mathbf{F}^{MD} - \mathbf{F})'] = AS = (I - A)T. \quad (5.8)$$

Beweis von Satz 5.1

Der Vektor $\mathbf{B} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{J-1})$ erfüllt die Annahmen des abstrakten multidimensionalen Credibility Modells (Abschnitt 7.2 in [3]). Die Beweise der Formeln können also aus dem Abschnitt 7.2 von [3] übernommen werden. Allerdings müssen wir noch zeigen, dass der Vektor $\mathbf{B} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{J-1})$ der optimalen Datenkomprimierung aller individueller Abwicklungsfaktoren $Y_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{w_{i,j}}$ des entsprechenden Abwicklungsdreiecks entspricht.

Nach Satz 7.12 aus [3] und weil die $Y_{i,j}, i = 0, \dots, I - j - 1$ die einzigen Beobachtungen des Y -Dreiecks sind, die Informationen über F_j enthalten, ist die optimale Datenkomprimierung gegeben durch den besten Schätzer von \mathbf{F} aus der Menge $\left\{ \widehat{\mathbf{F}} : \widehat{F}_j = \sum_i a_{i,j} Y_{i,j}, E \left[\widehat{F}_j | \mathbf{F} \right] = F_j \right\}$, wobei die $a_{i,j}$ reelle Koeffizienten sind.

Mit Satz A.4 aus [3] folgt, dass der beste erwartungstreue Schätzer von F_j gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \widehat{F}_j &= \left(\sum_{i=0}^{I-j-1} \left(\frac{\sigma_j^2}{w_{i,j}} \right)^{-1} \right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} \left(\frac{\sigma_j^2}{w_{i,j}} \right)^{-1} Y_{i,j} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{I-j-1} w_{k,j}} \sum_{i=0}^{I-j-1} w_{i,j} Y_{i,j} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{w_{i,j}}{w_{\bullet,j}} Y_{i,j} = Y_j. \end{aligned}$$

□

Satz 5.2

i) Der (homogene) multidimensionale Credibility-Schätzer von dem Abwicklungsvektor \mathbf{F} ist gegeben durch

$$\mathbf{F}^{(HOM),(g)} = A_{(g)} \mathbf{B}^{(g)} + (I - A_{(g)}) \widehat{\mathbf{f}} \quad (5.9)$$

mit

$$\mathbf{B}^{(g)} = \left(Y_0^{(g)}, Y_1^{(g)}, \dots, Y_{J-1}^{(g)} \right) \quad (5.10)$$

wobei auch hier wieder $Y_j^{(g)} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{w_{i,j}^{(g)}}{w_{\bullet,j}^{(g)}} Y_{i,j}^{(g)}$ gilt, und

$$A_{(g)} = T(T + S_{(g)})^{-1} \quad (5.11)$$

$$\widehat{\mathbf{f}} = \left(\sum_{g=1}^G A_{(g)} \right)^{-1} \sum_{g=1}^G A_{(g)} \mathbf{B}^{(g)} \quad (5.12)$$

sowie den strukturellen Parametern

$$S_{(g)} = E [\Sigma_{(g)}(\mathbf{F})] = E \left[\text{Cov} \left(\mathbf{B}^{(g)}, \mathbf{B}^{(g)' | \mathbf{F}} \right) \right] \quad (5.13)$$

$$T = \text{Cov}(\mathbf{F}, \mathbf{F}'). \quad (5.14)$$

ii) Die erwartete quadratische Schätzfehlermatrix von $\mathbf{F}^{(HOM),(g)}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Q^{(HOM),(g)} &= E \left[(\mathbf{F}^{(HOM),(g)} - \mathbf{F}) (\mathbf{F}^{(HOM),(g)} - \mathbf{F})' \right] \\ &= (I - A_{(g)})T \left(I + \left(\sum_{g=1}^G A'_{(g)} \right)^{-1} (I - A_{(g)})' \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Bemerkungen:

- Die Matrizen S (und somit auch die Matrizen A) von verschiedenen Risiken sind im Allgemeinen verschieden, da jedes Risiko andere Gewichte besitzt. Wenn wir den zusätzlichen Index g verwenden, bezeichnen wir die Matrix A des Risikos mit Index g mit $A_{(g)}$. Analog bezeichnen wir auch die anderen Matrizen.
- Die Matrix T ist für alle Risiken identisch. Um den kollektiven Schätzer $\widehat{\mathbf{f}}$ mit der Formel (5.12) berechnen zu können, muss die Matrix T regulär sein. Gleiches gilt auch für die Berechnung von $Q^{(HOM),(g)}$.
- Die Matrizen S und T können wieder aus den kollektiven Daten geschätzt werden. Allerdings ist es oft sinnvoller, selbst eine Struktur für T zu bestimmen. Ein möglicher Ansatz einer solchen Struktur wird im Folgenden gezeigt.

Nun wollen wir jedoch zuerst einen Schätzer für die Matrizen S angeben.

Satz 5.3

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_0^2}{w_{\bullet,0}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1^2}{w_{\bullet,1}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\sigma_{J-1}^2}{w_{\bullet,J-1}} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

wobei $\sigma_k^2 = E [\sigma_k^2(F_k)]$ genau die strukturellen Parameter aus dem Credibility Chain Ladder Modell sind.

Einen Schätzer für S erhalten wir also, wenn wir in der Matrix die Schätzer für $\sigma_k^2, k = 0, \dots, J - 1$ einsetzen.

Beweis von Satz 5.3

Da die individuellen Abwicklungsfaktoren $Y_{i,j}$ von verschiedenen Abwicklungsjahren bedingt, gegeben \mathbf{F} , unkorreliert sind, gilt

$$E[\text{Cov}(\mathbf{B}, \mathbf{B}'|\mathbf{F})] = E \left[\begin{pmatrix} \text{Var}(Y_0|F_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{Var}(Y_1|F_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \text{Var}(Y_{J-1}|F_{J-1}) \end{pmatrix} \right]$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_j|F_j) &= \text{Var} \left(\sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{w_{i,j}}{w_{\bullet,j}} Y_{i,j} \middle| F_j \right) \\ &= \sum_{i=0}^{I-j-1} \left(\frac{w_{i,j}}{w_{\bullet,j}} \right)^2 \text{Var}(Y_{i,j}|F_j) \\ &= \sum_{i=0}^{I-j-1} \left(\frac{w_{i,j}}{w_{\bullet,j}} \right)^2 \frac{\sigma_j^2(F_j)}{w_{i,j}} \\ &= \frac{\sigma_j^2(F_j)}{w_{\bullet,j}}. \end{aligned}$$

□

5.2 Ein mögliches Modell für die Kovarianzmatrix \mathbf{T}

Eine mögliche Annahme, die man in die Struktur von $T = \text{Cov}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ einfließen lassen kann, ist, dass Abwicklungsfaktoren, welche näher beieinander liegen, stärker korreliert sind als solche, die weiter auseinander liegen. Mathematisch kann man dies durch die folgenden Bedingungen beschreiben:

$$\text{Corr}(F_j, F_k) = \rho^{|j-k|} \text{ für } 0 \leq \rho \leq 1, \text{ falls } j \neq k \quad (5.17)$$

$$\text{Corr}(F_j, F_k) = 1, \text{ falls } j = k \quad (5.18)$$

Dies führt zu der a priori Kovarianzmatrix

$$T = D_\tau R D_\tau \quad (5.19)$$

mit der Korrelationsmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{J-1} \\ \rho & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \rho \\ \rho^{J-1} & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

sowie den Diagonalmatrizen

$$D_\tau = \begin{pmatrix} \tau_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{J-1} \end{pmatrix}$$

mit $\tau_j^2 = \text{Var}(F_j)$. Als Schätzer für die τ_j^2 verwenden wir die selben Schätzer wie im Credibility Chain Ladder Modell. Das sind entweder die gewöhnlichen Schätzer aus Satz 4.5, oder die Schätzer aus Satz 5.6, welche in Abschnitt 5.3 hergeleitet werden.

Bemerkungen:

- Die Matrix D_τ muss regulär sein um den kollektiven Schätzer $\widehat{\mathbf{f}}$ zu berechnen. Dies kann zu einem Problem führen, wenn wir den Schätzer (4.5) für τ_j^2 verwenden. Im Abschnitt 5.3 werden jedoch alternative Schätzer für σ_j^2 und τ_j^2 vorgestellt, bei denen dieses Problem praktisch nicht existiert, da zusätzliche Annahmen getroffen werden. Diese neuen Schätzer liefern dann auch insgesamt zufriedenstellendere Schätzungen als die Schätzer aus Satz 4.5.
- Falls $\rho = 0$ gewählt wird, befinden wir uns wieder im gewöhnlichen Credibility Chain Ladder Modell aus Abschnitt 4.
- Falls $\rho = 1$ gewählt wird, wird die Kovarianzmatrix T und somit auch die Matrizen A und $\left(\sum_{g=1}^G A_{(g)}\right)$ singulär. Dies hat zur Folge, dass der Kollektivschätzer $\widehat{\mathbf{f}}$ in der Form, wie er in (5.12) gegeben ist, nicht berechnet werden kann. Der Spezialfall $\rho = 1$ muss deshalb noch separat betrachtet werden.

Für $\rho = 1$ wollen wir die Formel (5.12) in eine neue Form bringen, damit wir $\widehat{\mathbf{f}}$ berechnen können. Es wird angenommen, dass $\tau_j^2 > 0$ und $\sigma_j^2 > 0$ für alle $j = 0, \dots, J - 1$. Diese Annahme ist für die Praxis jedoch unproblematisch.

Satz 5.4

Im Falle von $\rho = 1$ ist der Kollektivschätzer von $\mathbf{f} = E[\mathbf{F}]$ gegeben durch

$$\widehat{\mathbf{f}} = D_\tau \left(\sum_{g=1}^G V_{(g)} \right)^{-1} \sum_{g=1}^G V_{(g)} D_\tau^{-1} \mathbf{B}^{(g)} \quad (5.20)$$

mit

$$V_{(g)} = (R + D_\tau^{-1} S_{(g)} D_\tau^{-1})^{-1}. \quad (5.21)$$

Beweis von Satz 5.4

Wir zeigen, dass der Schätzer (5.20) identisch ist mit dem Schätzer (5.12) und keine singulären Matrizen vorkommen.

$$\begin{aligned} A_{(g)} &= D_\tau R D_\tau (D_\tau R D_\tau + S_{(g)})^{-1} \\ &= D_\tau R (D_\tau R + S_{(g)} D_\tau^{-1})^{-1} \\ &= D_\tau R (R + D_\tau^{-1} S_{(g)} D_\tau^{-1})^{-1} D_\tau^{-1} \\ &= D_\tau R V_{(g)} D_\tau^{-1} \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\left(\sum_{g=1}^G A_{(g)} \right) = D_\tau R \sum_{g=1}^G V_{(g)} D_\tau^{-1}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{f}} &= \left(\sum_{g=1}^G A_{(g)} \right)^{-1} \sum_{g=1}^G A_{(g)} \mathbf{B}^{(g)} \\
&= \sum_{g=1}^G \left(\sum_{h=1}^G A_{(h)} \right)^{-1} A_{(g)} \mathbf{B}^{(g)} \\
&= \sum_{g=1}^G \left(D_\tau R \sum_{h=1}^G V_{(h)} D_\tau^{-1} \right)^{-1} D_\tau R V_{(g)} D_\tau^{-1} \mathbf{B}^{(g)} \\
&= \sum_{g=1}^G D_\tau \left(\sum_{h=1}^G V_{(h)} \right)^{-1} R^{-1} D_\tau^{-1} D_\tau R V_{(g)} D_\tau^{-1} \mathbf{B}^{(g)} \\
&= D_\tau \left(\sum_{h=1}^G V_{(h)} \right)^{-1} \sum_{g=1}^G V_{(g)} D_\tau^{-1} \mathbf{B}^{(g)}.
\end{aligned}$$

Da $D_\tau^{-1} S_{(g)} D_\tau^{-1}$ nach Annahme eine Diagonalmatrix mit strikt positiven Elementen auf der Diagonale ist, existiert $V_{(g)} = (R + D_\tau^{-1} S_{(g)} D_\tau^{-1})^{-1}$ unabhängig von der Wahl von ρ . Zudem ist D_τ nicht singulär, da auch $\tau_j > 0$ für alle $j = 0, \dots, J - 1$ angenommen wurde. \square

5.3 Erweitertes Modell für die Schätzung der strukturellen Parameter σ^2 und τ^2

Mit realen Daten aus der Versicherungspraxis hat man oft das Problem, dass die mit den üblicherweise verwendeten Schätzern (vgl. Satz 4.5) geschätzten Parameter σ_j^2 und insbesondere τ_j^2 unrealistische Schwankungen aufweisen. Um dies zu verhindern, können einige zusätzliche Annahmen getroffen werden, welche in diesem Abschnitt beschrieben werden.

Wir erinnern uns nochmals an die CL-Annahmen (3.3) und (3.4), welche besagen, dass

$$E[C_{i,j+1} | F_j, \mathcal{B}_j] = F_j C_{i,j} \quad (5.22)$$

und

$$\text{Var}(C_{i,j+1} | F_j, \mathcal{B}_j) = \sigma_j^2(F_j) C_{i,j} \quad (5.23)$$

gilt. Im Weiteren wollen wir nun die inkrementellen Schadenzahlungen $X_{i,j}$ betrachten, wobei wie üblich $C_{i,j+1} = C_{i,j} + X_{i,j+1}$ und $C_{i,0} = X_{i,0}$ gilt.

Für diese gelten die analogen Gleichungen

$$E[X_{i,j+1}|F_j, \mathcal{B}_j] = (F_j - 1)C_{i,j} = \tilde{F}_j C_{i,j} \quad (5.24)$$

und

$$\text{Var}(X_{i,j+1}|F_j, \mathcal{B}_j) = \sigma_j^2(F_j)C_{i,j}, \quad (5.25)$$

was zu den bedingten Dispersionsparametern

$$\tilde{\varphi}_j(F_j) = \frac{\text{Var}(X_{i,j+1}|F_j, \mathcal{B}_j)}{E[X_{i,j+1}|F_j, \mathcal{B}_j]} = \frac{\sigma_j^2(F_j)}{\tilde{F}_j} \quad (5.26)$$

führt. Weiter betrachten wir noch den quadrierten Variationskoeffizienten von $\tilde{F}_j = F_j - 1$:

$$\tilde{v}_j^2 = \left(\frac{\sqrt{\text{Var}(F_j - 1)}}{E[F_j - 1]} \right)^2 = \frac{\tau_j^2}{\tilde{f}_j^2} \quad (5.27)$$

mit $\tilde{f}_j = E[F_j - 1] = f_j - 1$.

Nun folgen die Annahmen die man bezüglich diesen Parametern $\tilde{\varphi}_j(F_j)$ und \tilde{v}_j^2 treffen kann, um realistischere Schätzungen für die strukturellen Parameter σ_j^2 und τ_j^2 zu erhalten.

Modellannahmen 5.1 (Erweiterte Annahmen für die Schätzung von σ_j^2 und τ_j^2)

S1 Der Erwartungswert der bedingten Dispersionsparameter $\tilde{\varphi}_j(F_j)$ ist von einem bestimmten Abwicklungsjahr an konstant.

$$E[\tilde{\varphi}_j(F_j)] = E[\tilde{\varphi}_{j_0}(F_{j_0})] \text{ für alle } j \geq j_0 \quad (5.28)$$

S2 Die (quadrierten) Variationskoeffizienten \tilde{v}_j^2 von $\tilde{F}_j = F_j - 1$ sind konstant.

$$\tilde{v}_j^2 = \tilde{v}^2 \text{ für alle } j \geq 0 \quad (5.29)$$

Bemerkungen:

- Die erste Annahme (5.28) reduziert die Schwankungen der strukturellen Parameter σ_j^2 für alle $j \geq j_0$.
- Die zweite Annahme (5.29) reduziert die Schwankungen der strukturellen Parameter τ_j^2 für alle $j \geq 0$.

Nun brauchen wir noch Schätzer, welche die oben genannten Annahmen berücksichtigen. Dazu betrachten wir zuerst Schätzer für $\tilde{\varphi}_j = E[\tilde{\varphi}_j(F_j)]$ und \tilde{v}_j^2 , welche wir aus den üblichen Schätzern für σ_j^2 und τ_j^2 konstruieren. Der Schätzer $\widehat{\tilde{\varphi}}_j^{(g)}$ (5.34) für die individuellen Dispersionsparameter folgt aus der Formel (5.26) und der Schätzer $\widehat{\tilde{\varphi}}_j^{(g)}$ (5.32), für alle $j \geq j_0$, ist ein gewichtetes Mittel der beteiligten individuellen Schätzer. Da die (quadrierten) Variationskoeffizienten \tilde{v}_j^2 als konstant angenommen werden, erhalten wir einen entsprechenden Schätzer für \tilde{v}^2 direkt aus der Formel (5.27). Mit diesem Vorgehen erhalten wir:

Satz 5.5

i) Ein Schätzer für $\tilde{\varphi}_j$ ist gegeben durch

$$\widehat{\tilde{\varphi}}_j = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G \widehat{\tilde{\varphi}}_j^{(g)} \quad (5.30)$$

wobei

$$\widehat{\tilde{\varphi}}_j^{(g)} = \widehat{\tilde{\varphi}}_j^{(g)}, \text{ für alle } j < j_0 \text{ und} \quad (5.31)$$

$$\widehat{\tilde{\varphi}}_j^{(g)} = \sum_{j \geq j_0}^{J-1} \frac{n_j}{\sum_{k \geq j_0}^{J-1} n_k - (J - j_0)} \widehat{\tilde{\varphi}}_j^{(g)}, \text{ für alle } j \geq j_0 \quad (5.32)$$

mit

$$n_j = I - j - 1 \quad (5.33)$$

$$\widehat{\tilde{\varphi}}_j^{(g)} = \frac{\widehat{\sigma}_j^{2(g)}}{Y_j^{(g)} - 1} \quad (5.34)$$

$$\widehat{\sigma}_j^{2(g)} = \frac{1}{I - j - 1} \sum_{i=0}^{I-j-1} w_{i,j}^{(g)} \left(Y_{i,j}^{(g)} - Y_j^{(g)} \right)^2. \quad (5.35)$$

ii) Ein Schätzer für \tilde{v}^2 ist gegeben durch

$$\widehat{\tilde{v}}^2 = \frac{\sum_{j=0}^{J-1} \widehat{\tau}_j^2}{\sum_{j=0}^{J-1} \widehat{f}_j} \quad (5.36)$$

wobei für $\widehat{\tau}_j^2$ der Schätzer aus (4.22) verwendet wird und

$$\widehat{f}_j = \bar{Y}_j - 1 = \sum_{g=1}^G \frac{w_{\bullet,j}^{(g)}}{w_{\bullet,j}} (Y_j^{(g)} - 1). \quad (5.37)$$

Mit den Schätzern (5.30) und (5.36) lassen sich nun die neuen Schätzer für σ_j^2 und τ_j^2 bilden.

Satz 5.6

i) Ein Schätzer für σ_j^2 mit Einbezug der Annahmen 5.1 ist gegeben durch

$$\widehat{\sigma}_j^{2*} = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G (Y_j^{(g)} - 1) \widehat{\widehat{\varphi}}_j^{(g)}. \quad (5.38)$$

ii) Ein entsprechender Schätzer für τ_j^2 ist gegeben durch

$$\widehat{\tau}_j^{2*} = \widehat{f}_j \widehat{v}^2 = (\overline{Y}_j - 1) \widehat{v}^2. \quad (5.39)$$

Diese neu geschätzten Parameter können wir nun wie gewöhnlich ins Modell einfließen lassen, was zu neuen Credibility-Gewichten, respektive zu neuen Credibility-Matrizen, führt.

Bemerkungen:

- Für das gewöhnliche Credibility CL-Modell aus Kapitel 4 können wir die Schätzer dieser neuen Credibility-Gewichte auch direkt mit den

geschätzten Parametern $\widehat{\varphi}_j$ und \widehat{v}^2 angeben: $\widehat{\alpha}_j = \frac{\widehat{f}_j w_{\bullet,j}}{\widehat{f}_j w_{\bullet,j} + \frac{\widehat{\varphi}_j}{\widehat{v}^2}}$

5.4 Formeln für den MSEP im multidimensionalen Credibility CL-Modell

Nun wollen wir wieder Formeln für die bedingten erwarteten quadratischen Schätzfehler für die Rückstellungsschätzer R_i^{MD} und $R_i^{(HOM),(g)}$ herleiten. Dazu beginnen wir wieder mit einer Dekomposition

$$E \left[(C_{i,J}^{MD} - C_{i,J})^2 \mid \mathbf{F}, \mathcal{D} \right] = \text{Var}(C_{i,J} \mid \mathbf{F}, \mathcal{D}) + E \left[(C_{i,J}^{MD} - E[C_{i,J} \mid \mathbf{F}, \mathcal{D}])^2 \mid \mathbf{F}, \mathcal{D} \right], \quad (5.40)$$

was zu

$$\begin{aligned} msep(R_i^{MD}) &= E \left[(C_{i,J}^{MD} - C_{i,J})^2 \mid \mathcal{D} \right] \\ &= E \left[\text{Var}(C_{i,J} \mid \mathbf{F}, \mathcal{D}) \mid \mathcal{D} \right] + E \left[(C_{i,J}^{MD} - E[C_{i,J} \mid \mathbf{F}, \mathcal{D}])^2 \mid \mathcal{D} \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

führt, wenn wir von beiden Seiten der Gleichung (5.40) den bedingten Erwartungswert $E[\cdot \mid \mathcal{D}]$ nehmen. Zuerst betrachten wir den zweiten Term und vereinfachen diesen mit den folgenden Taylorentwicklungen um die $E[F_j \mid \mathcal{D}] = F_j^{Bayes}$:

$$\begin{aligned} C_{i,J}^{MD} &= C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} F_j^{MD} \\ &\approx C_{i,I-i} \left(\prod_{j=I-i}^{J-1} F_j^{Bayes} + \sum_{j=I-i}^{J-1} (F_j^{MD} - F_j^{Bayes}) \prod_{\substack{k=I-i \\ k \neq j}}^{J-1} F_k^{Bayes} \right) \end{aligned} \quad (5.42)$$

und

$$\begin{aligned} E[C_{i,J} \mid \mathbf{F}, \mathcal{D}] &= C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} F_j \\ &\approx C_{i,I-i} \left(\prod_{j=I-i}^{J-1} F_j^{Bayes} + \sum_{j=I-i}^{J-1} (F_j - F_j^{Bayes}) \prod_{\substack{k=I-i \\ k \neq j}}^{J-1} F_k^{Bayes} \right), \end{aligned} \quad (5.43)$$

was zu der Approximation

$$C_{i,J}^{MD} - E[C_{i,J} \mid \mathbf{F}, \mathcal{D}] \approx C_{i,I-i} \left(\sum_{j=I-i}^{J-1} (F_j^{MD} - F_j) \prod_{\substack{k=I-i \\ k \neq j}}^{J-1} F_k^{Bayes} \right) \quad (5.44)$$

führt. Mit dieser erhalten wir

$$\begin{aligned}
& E \left[(C_{i,J}^{MD} - E[C_{i,J}|\mathbf{F}, \mathcal{D}])^2 | \mathcal{D} \right] \\
& \approx C_{i,I-i}^2 E \left[\left(\sum_{j=I-i}^{J-1} (F_j^{MD} - F_j) \prod_{\substack{k=I-i \\ k \neq j}}^{J-1} F_k^{Bayes} \right)^2 \middle| \mathcal{D} \right] \\
& = C_{i,I-i}^2 \prod_{j=I-i}^{J-1} (F_j^{Bayes})^2 \sum_{k=I-i}^{J-1} \sum_{l=I-i}^{J-1} \frac{1}{F_k^{Bayes} F_l^{Bayes}} E [(F_k^{MD} - F_k) (F_l^{MD} - F_l) | \mathcal{D}] \\
& \simeq C_{i,I-i}^2 \prod_{j=I-i}^{J-1} (F_j^{Bayes})^2 \sum_{k=I-i}^{J-1} \sum_{l=I-i}^{J-1} \frac{1}{F_k^{Bayes} F_l^{Bayes}} E [(F_k^{MD} - F_k) (F_l^{MD} - F_l)] \\
& = C_{i,I-i}^2 \prod_{j=I-i}^{J-1} (F_j^{Bayes})^2 \sum_{k=I-i}^{J-1} \sum_{l=I-i}^{J-1} \frac{1}{F_k^{Bayes} F_l^{Bayes}} Q^{MD}_{(kl)}.
\end{aligned}$$

Nun wollen wir noch den ersten Term $E[\text{Var}(C_{i,J}|\mathbf{F}, \mathcal{D})|\mathcal{D}]$ abschätzen. Dazu verwenden wir das Zwischenresultat (3.22) vom Theorem 3.7 aus [5],

$$\text{Var}(C_{i,J}|\mathbf{F}, \mathcal{D}) = C_{i,I-i} \sum_{k=I-i}^{J-1} F_{I-i} \dots F_{k-1} \sigma_k^2(F_k) F_{k+1}^2 \dots F_{J-1}^2, \quad (5.45)$$

und vereinfachen dies mit der folgenden Taylorentwicklung um die bedingten Erwartungswerte $E[\cdot|\mathcal{D}]$ der entsprechenden Zufallsvariablen F_j , $\sigma_j^2(F_j)$ und F_j^2 :

$$\begin{aligned}
& F_{I-i} \dots F_{k-1} \sigma_k^2(F_k) F_{k+1}^2 \dots F_{J-1}^2 \\
& \approx \prod_{l=I-i}^{k-1} F_l^{Bayes} \widehat{\sigma}_k^2 \prod_{l=k+1}^{J-1} E[F_l^2|\mathcal{D}] \\
& + \sum_{l=I-i}^{k-1} (F_l - F_l^{Bayes}) \prod_{\substack{n=I-i \\ n \neq l}}^{k-1} F_n^{Bayes} \widehat{\sigma}_k^2 \prod_{l=k+1}^{J-1} E[F_l^2|\mathcal{D}] \\
& + (\sigma_k^2(F_k) - \widehat{\sigma}_k^2) \prod_{l=I-i}^{k-1} F_l^{Bayes} \prod_{l=k+1}^{J-1} E[F_l^2|\mathcal{D}] \\
& + \sum_{l=k+1}^{J-1} (F_l^2 - E[F_l^2|\mathcal{D}]) \prod_{l=I-i}^{k-1} F_l^{Bayes} \widehat{\sigma}_k^2 \prod_{\substack{n=k+1 \\ n \neq l}}^{J-1} E[F_l^2|\mathcal{D}]
\end{aligned} \quad (5.46)$$

Mit Hilfe dieser Linearisierung erhalten wir nun

$$E [Var(C_{i,J}|\mathbf{F}, \mathcal{D})|\mathcal{D}] \approx C_{i,I-i} \sum_{k=I-i}^{J-1} \widehat{\sigma}_k^2 \prod_{l=I-i}^{k-1} F_l^{Bayes} \prod_{l=k+1}^{J-1} E [F_l^2|\mathcal{D}]. \quad (5.47)$$

Wenn wir die Approximation

$$\begin{aligned} E [F_l^2|\mathcal{D}] &= E \left[\left(F_l - F_l^{Bayes} \right)^2 |\mathcal{D} \right] + \left(F_l^{Bayes} \right)^2 \\ &\approx E \left[\left(F_l - F_l^{MD} \right)^2 |\mathcal{D} \right] + \left(F_l^{MD} \right)^2 \\ &\simeq E \left[\left(F_l - F_l^{MD} \right)^2 \right] + \left(F_l^{MD} \right)^2 \\ &= Q_{(l)}^{MD} + \left(F_l^{MD} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.48)$$

verwenden und die restlichen F_j^{Bayes} wieder durch die entsprechenden F_j^{MD} schätzen, erhalten wir:

Satz 5.7

$$\widehat{msep} (R_i^{MD}) = C_{i,I-i} \Gamma_{I-i}^* + C_{i,I-i}^2 \Delta_{I-i}^* \quad (5.49)$$

mit

$$\Gamma_j^* = \sum_{k=j}^{J-1} \left\{ \left(\prod_{m=j}^{k-1} F_m^{MD} \right) \widehat{\sigma}_k^2 \prod_{n=k+1}^{J-1} \left(\left(F_n^{MD} \right)^2 + Q_{(nn)}^{MD} \right) \right\} \quad (5.50)$$

$$\Delta_j^* = \prod_{k=j}^{J-1} \left(F_k^{MD} \right)^2 \sum_{l=j}^{J-1} \sum_{m=j}^{J-1} \frac{1}{F_l^{MD} F_m^{MD}} Q_{(lm)}^{MD}. \quad (5.51)$$

Bemerkungen:

- Für die Taylorapproximation (5.46) haben wir $\widehat{\sigma}_k^2$ als Bayes-Schätzer von $\sigma_k^2(F_k)$ angenommen. In der Formel (5.50) verwenden wir jedoch den gewöhnlichen Schätzer.

Zudem können wir auch wieder eine Formel für den Schätzfehler der gesamten Rückstellung eines Risikos finden.

$$\begin{aligned}
msep(R^{MD}) &= E \left[\left(\sum_{i=1}^I C_{i,J}^{MD} - \sum_{i=1}^I C_{i,J} \right)^2 \middle| \mathcal{D} \right] \\
&= \sum_{i=1}^I E[\text{Var}(C_{i,J} | \mathbf{F}, \mathcal{D}) | \mathcal{D}] + \sum_{i=1}^I E \left[(C_{i,J}^{MD} - E[C_{i,J} | \mathbf{F}, \mathcal{D}])^2 | \mathcal{D} \right] \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^I \sum_{k=i+1}^I E \left[(C_{i,J}^{MD} - E[C_{i,J} | \mathbf{F}, \mathcal{D}]) (C_{k,J}^{MD} - E[C_{k,J} | \mathbf{F}, \mathcal{D}]) | \mathcal{D} \right]
\end{aligned}$$

Wenn wir für den letzten Term wieder eine analoge Linearisierungen wie in (4.36) verwenden, erhalten wir unter Berücksichtigung von

$$msep(R_i^{MD}) = E[\text{Var}(C_{i,J} | \mathbf{F}, \mathcal{D}) | \mathcal{D}] + E \left[(C_{i,J}^{MD} - E[C_{i,J} | \mathbf{F}, \mathcal{D}])^2 | \mathcal{D} \right] \quad (5.52)$$

die folgende Formel:

Korollar 5.8

$$\widehat{msep}(R^{MD}) = \sum_{i=1}^I \widehat{msep}(R_i^{MD}) + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq I} C_{i,I-i} C_{k,I-k} \Delta_{I-i,I-k}^* \quad (5.53)$$

wobei

$$\Delta_{i,k}^* = \prod_{l=i}^{J-1} F_l^{MD} \prod_{m=k}^{J-1} F_m^{MD} \sum_{l=i}^{J-1} \sum_{m=k}^{J-1} \frac{1}{F_l^{MD} F_m^{MD}} Q_{(lm)}^{MD}. \quad (5.54)$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir die Resultate für die auf homogenen Schätzern basierenden Rückstellungsschätzer:

Satz 5.9

$$\widehat{msep}(R_i^{(HOM),(g)}) = C_{i,I-i} \Gamma_{I-i}^{**} + C_{i,I-i}^2 \Delta_{I-i}^{**} \quad (5.55)$$

mit

$$\Gamma_j^{**} = \sum_{k=j}^{J-1} \left\{ \left(\prod_{m=j}^{k-1} F_m^{(HOM)} \right) \widehat{\sigma}_k^2 \prod_{n=k+1}^{J-1} \left((F_n^{(HOM)})^2 + Q_{(nn)}^{(HOM)} \right) \right\} \quad (5.56)$$

$$\Delta_j^{**} = \prod_{k=j}^{J-1} (F_k^{(HOM)})^2 \sum_{l=j}^{J-1} \sum_{m=j}^{J-1} \frac{1}{F_l^{(HOM)} F_m^{(HOM)}} Q_{(lm)}^{(HOM)}. \quad (5.57)$$

Sowie:

Korollar 5.10

$$\widehat{msep}(R^{(HOM),(g)}) = \sum_{i=1}^I \widehat{msep}\left(R_i^{(HOM),(g)}\right) + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq I} C_{i,I-i} C_{k,I-k} \Delta_{I-i,I-k}^{**} \quad (5.58)$$

wobei

$$\Delta_{i,k}^{**} = \prod_{l=i}^{J-1} F_l^{(HOM)} \prod_{m=k}^{J-1} F_m^{(HOM)} \sum_{l=i}^{J-1} \sum_{m=k}^{J-1} \frac{1}{F_l^{(HOM)} F_m^{(HOM)}} Q_{(lm)}^{(HOM)}. \quad (5.59)$$

Im homogenen Kontext müssen wir zudem wieder eine Formel für den Schätzfehler der Rückstellungen des gesamten Portfolios

$$R_{Total}^{(HOM)} = \sum_{g=1}^G R^{(HOM),(g)} \quad (5.60)$$

finden. Dazu gehen wir gleich vor wie bei der Herleitung von Satz 4.10 und erhalten wieder

$$\begin{aligned} & msep\left(R_{Total}^{(HOM)}\right) \\ & \approx \sum_{g=1}^G msep\left(R^{(HOM),(g)}\right) \\ & + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq G} \sum_{0 \leq l, m \leq I} \left(C_{l,I-l}^{(i)} C_{m,I-m}^{(k)} \prod_{n=I-l}^{J-1} F_n^{Bayes(i)} \prod_{p=I-m}^{J-1} F_p^{Bayes(k)} \right. \\ & \cdot \left. \sum_{j=I-m}^{J-1} \sum_{h=I-m}^{J-1} \frac{1}{F_j^{Bayes(i)} F_h^{Bayes(k)}} E \left[\left(F_j^{(HOM),(i)} - F_j^{(i)} \right) \left(F_h^{(HOM),(k)} - F_h^{(k)} \right) \mid \mathcal{D} \right] \right). \end{aligned}$$

Um eine geeignete Formel für den letzten Term zu finden, wechseln wir wieder zu den als bekannt betrachteten Gewichten $w_{i,j}$ und erhalten

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\mathbf{F}^{(HOM),(i)} - \mathbf{F}^{(i)} \right) \left(\mathbf{F}^{(HOM),(k)} - \mathbf{F}^{(k)} \right) \mid \mathcal{D} \right] \\ & \simeq E \left[\left(\mathbf{F}^{(HOM),(i)} - \mathbf{F}^{(i)} \right) \left(\mathbf{F}^{(HOM),(k)} - \mathbf{F}^{(k)} \right) \right] \\ & = E \left[\left(A_{(i)} \mathbf{B}^{(i)} + (I - A_{(i)}) \widehat{\mathbf{f}} - \mathbf{F}^{(i)} \right) \left(A_{(k)} \mathbf{B}^{(k)} + (I - A_{(k)}) \widehat{\mathbf{f}} - \mathbf{F}^{(k)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Wegen dem Verschiebungssatz $E[XY] = E[X]E[Y] + \text{Cov}(X, Y)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(A_{(i)} \mathbf{B}^{(i)} + (I - A_{(i)}) \widehat{\mathbf{f}} - \mathbf{F}^{(i)} \right) \left(A_{(k)} \mathbf{B}^{(k)} + (I - A_{(k)}) \widehat{\mathbf{f}} - \mathbf{F}^{(k)} \right) \right] \\
&= A_{(i)} \text{Cov} \left(\mathbf{B}^{(i)}, \widehat{\mathbf{f}} \right) - A_{(i)} \text{Cov} \left(\mathbf{B}^{(i)}, \widehat{\mathbf{f}} \right) A'_{(k)} + \text{Cov} \left(\widehat{\mathbf{f}}, \mathbf{B}^{(k)} \right) A'_{(k)} \\
&- A_{(i)} \text{Cov} \left(\widehat{\mathbf{f}}, \mathbf{B}^{(k)} \right) A'_{(k)} - \text{Cov} \left(\widehat{\mathbf{f}}, \mathbf{F}^{(k)} \right) + A_{(i)} \text{Cov} \left(\widehat{\mathbf{f}}, \mathbf{F}^{(k)} \right) \\
&- \text{Cov} \left(\mathbf{F}^{(i)}, \widehat{\mathbf{f}} \right) + \text{Cov} \left(\mathbf{F}^{(i)}, \widehat{\mathbf{f}} \right) A'_{(k)} + \overbrace{\text{Cov} \left(\mathbf{F}^{(i)}, \mathbf{F}^{(k)} \right)}^{=0} \\
&+ (I - A_{(i)}) \text{Cov} \left(\widehat{\mathbf{f}}, \widehat{\mathbf{f}} \right) (I - A'_{(k)}).
\end{aligned}$$

Mit den folgenden Umformungen, welche auf den Gleichungen $\text{Cov}(\mathbf{B}, \mathbf{B}) = E[\text{Cov}(\mathbf{B}, \mathbf{B}|\mathbf{F})] + \text{Cov}(E[\mathbf{B}|\mathbf{F}], E[\mathbf{B}|\mathbf{F}]) = S+T$ und $\text{Cov}(\mathbf{F}, \mathbf{B}) = A \text{Cov}(\mathbf{B}, \mathbf{B})$ basieren, erhalten wir:

$$\text{Cov} \left(\mathbf{B}^{(i)}, \widehat{\mathbf{f}} \right) = \text{Cov} \left(\mathbf{B}^{(i)}, \mathbf{B}^{(i)} \right) A'_{(i)} \left(\sum_{g=1}^G A'_{(g)} \right)^{-1} = (S_{(i)}+T) A'_{(i)} \left(\sum_{g=1}^G A'_{(g)} \right)^{-1} \quad (5.61)$$

$$\text{Cov} \left(\widehat{\mathbf{f}}, \mathbf{B}^{(k)} \right) = \left(\sum_{g=1}^G A_{(g)} \right)^{-1} A_{(k)} (S_{(k)} + T) \quad (5.62)$$

$$\text{Cov} \left(\mathbf{F}^{(i)}, \widehat{\mathbf{f}} \right) = \text{Cov} \left(\mathbf{F}^{(i)}, \mathbf{B}^{(i)} \right) A'_{(i)} \left(\sum_{g=1}^G A'_{(g)} \right)^{-1} = T A'_{(i)} \left(\sum_{g=1}^G A'_{(g)} \right)^{-1} \quad (5.63)$$

$$\text{Cov} \left(\widehat{\mathbf{f}}, \mathbf{F}^{(k)} \right) = \left(\sum_{g=1}^G A'_{(g)} \right)^{-1} A_{(k)} T \quad (5.64)$$

$$\text{Cov} \left(\widehat{\mathbf{f}}, \widehat{\mathbf{f}} \right) = T \left(\sum_{g=1}^G A'_{(g)} \right)^{-1} \quad (5.65)$$

Weil $A_{(g)}(S_{(g)} + T) = T$ sowie $T A'_{(g)} = A_{(g)} T$ gilt, was man in [3] nachlesen kann, löschen sich alle bis auf den letzten Term aus und wir erhalten

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\mathbf{F}^{(HOM),(i)} - \mathbf{F}^{(i)} \right) \left(\mathbf{F}^{(HOM),(k)} - \mathbf{F}^{(k)} \right) \right] \\
&= (I - A_{(i)}) T \left(\sum_{g=1}^G A'_{(g)} \right)^{-1} (I - A'_{(k)}).
\end{aligned}$$

Zusammengesetzt ergibt dies:

Satz 5.11

$$\widehat{msep} \left(R_{Total}^{(HOM)} \right) = \sum_{g=1}^G \widehat{msep} \left(R^{(HOM),(g)} \right) + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq G} \sum_{l=0}^I \sum_{m=0}^I C_{l,J}^{(HOM),(i)} C_{m,J}^{(HOM),(k)} \Delta_{(i,k,l,m)}^* \quad (5.66)$$

mit

$$\Delta_{(i,k,l,m)}^* = \sum_{j=I-l}^{J-1} \sum_{h=I-m}^{J-1} \frac{1}{F_j^{(HOM),(i)} F_h^{(HOM),(k)}} M_{(jh)}^{(i,k)} \quad (5.67)$$

und der Matrix

$$M^{(i,k)} = (I - A_{(i)}) T \left(\sum_{g=1}^G A'_{(g)} \right)^{-1} (I - A'_{(k)}). \quad (5.68)$$

Bemerkungen:

- Die Formel (5.66) hat grosse Ähnlichkeit mit der Formel (4.38) von dem gewöhnlichen Credibility CL-Modell.

6 Numerische Beispiele

Die folgenden Beispiele wurden mit realen Daten aus der Unfallversicherung gerechnet, welche im Anhang zu finden sind.

6.1 Einfluss des erweiterten Modells 5.1 auf die Credibility Koeffizienten κ

Ein Problem der gewöhnlichen Schätzer für σ_j^2 und τ_j^2 ist, dass sehr grosse Schwankungen in den Abwicklungsjahren auftreten können, die nicht erklärbar sind. Auch bei den hier verwendeten Daten ist dies der Fall. Abweichungen der $\hat{\tau}_j^2$, von einem Abwicklungsjahr zum Nächsten, sind zum Teil um ein Vielfaches grösser, als die Werte selbst. Beispiele dafür sind die Schwankungen zwischen den Jahren 8 und 9 oder zwischen den Jahren 12 und 13, wie man der Wertetabelle weiter unten entnehmen kann. Diese Schwankungen übertragen sich normalerweise in die Credibility Koeffizienten $\kappa_j = \frac{\sigma_j^2}{\tau_j^2}$, was anhand der Abbildung 3 gut zu sehen ist. Dies führt zu Verzerrungen in den Credibility-Gewichten α_j , respektive in den Credibility-Matrizen A . Mit den erweiterten Annahmen von Modell 5.1 können die Schwankungen der geschätzten Parameter stark reduziert werden. In der Abbildung 3 erkennt man sehr gut die Glättung der κ_j , wenn man die Schätzer aus dem Abschnitt 5.3 verwendet. In der darauf folgenden Tabelle findet man die zugehörigen Werte von κ_j , σ_j und τ_j , wobei sie je einmal mit dem gewöhnlichen und einmal mit dem erweiterten Schätzmodell berechnet wurden.

Bemerkungen:

- Für alle Berechnungen mit dem erweiterten Modell 5.1 wurde $j_0 = 3$ gewählt. Dies gilt auch für alle weiteren numerischen Beispiele in dieser Arbeit.

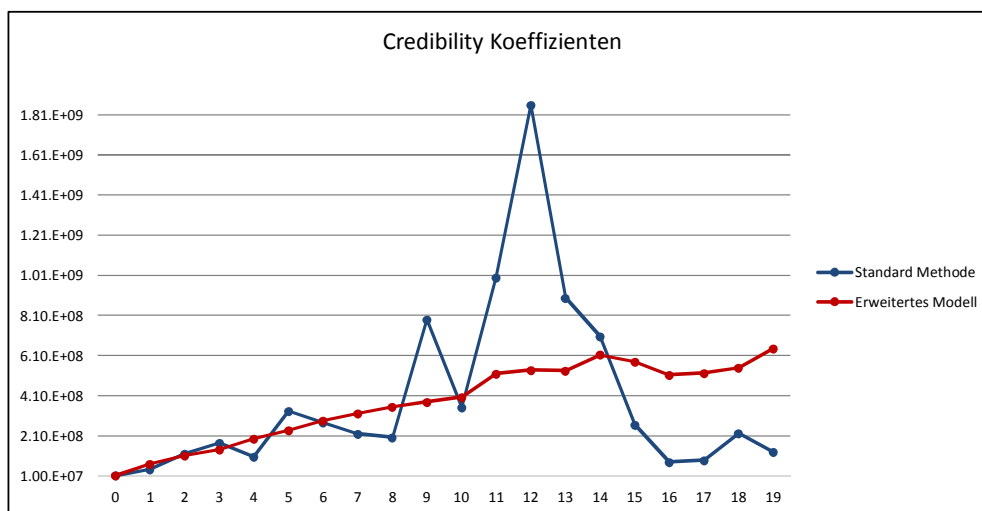


Abbildung 3: Glättung der Credibility Koeffizienten κ

Standard Schätzung		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
σ_j	=	233	77	42	27	22	20	19	19	16	19	16	19	17	19	23	14	11	16	15	13
τ_j	=	0.0646	0.0116	0.0038	0.0020	0.0021	0.0011	0.0011	0.0013	0.0012	0.0007	0.0008	0.0006	0.0004	0.0006	0.0009	0.0009	0.0012	0.0017	0.0010	0.0012
κ_j	=	1.31.E+07	4.47.E+07	1.21.E+08	1.75.E+08	1.08.E+08	3.34.E+08	2.77.E+08	2.22.E+08	2.04.E+08	7.91.E+08	3.52.E+08	1.00.E+09	1.86.E+09	8.98.E+08	7.06.E+08	2.65.E+08	7.93.E+07	9.01.E+07	2.25.E+08	1.31.E+08

Schätzung mit erweitertem Modell		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
σ_j	=	233	77	42	28	24	22	20	19	18	17	16	16	16	16	16	15	14	14	14	15
τ_j	=	0.0650	0.0092	0.0039	0.0024	0.0017	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
κ_j	=	1.29.E+07	7.04.E+07	1.14.E+08	1.43.E+08	1.96.E+08	2.38.E+08	2.86.E+08	3.22.E+08	3.56.E+08	3.80.E+08	4.04.E+08	5.22.E+08	5.40.E+08	5.36.E+08	6.15.E+08	5.82.E+08	5.15.E+08	5.24.E+08	5.50.E+08	6.46.E+08

Wertetabellen der Parameter σ , τ und κ

6.2 Einfluss des Korrelationsparameters ρ auf die Credibility-Schätzer im multidimensionalen Credibility CL-Modell

Der Korrelationsparameter ρ aus dem Modell 5.2 für die Korrelationsmatrix T wirkt als Glättungsparameter. Dies ist auch der Hauptzweck dieses multidimensionalen Credibility CL-Modells, welches als Werkzeug zur Glättung von Abwicklungspattern dienen soll, ohne dass manuelle Eingriffe zur Glättung der Schätzwerte für die Abwicklungsfaktoren nötig werden. Die nächsten Abbildungen zeigen diesen Glättungseffekt anhand der geschätzten Abwicklungsfaktoren für die Abwicklungsjahre $j = 2, \dots, J - 1$. Das erste Diagramm, Abbildung 4, zeigt die Abwicklungsfaktoren der 9 Gruppen, welche mit dem klassischen CL-Modell berechnet wurden. Das darauffolgende

Diagramm, Abbildung 5, zeigt die Abwicklungsfaktoren, die mit dem Credibility CL-Modell, was analog zum multidimensionalen Credibility CL-Modell mit $\rho = 0$ ist, berechnet wurden. Wie man dort erkennt, sind die Abwicklungsfaktoren, im Vergleich zu denen aus Abbildung 4, recht glatt. Allerdings fällt auch auf, dass die Faktoren stark zusammengezogen werden, besonders in den hinteren Abwicklungsjahren. Dies hat damit zu tun, dass die Credibility-Gewichte klein sind und die kollektiv geschätzten Abwicklungsfaktoren deshalb stark gewichtet werden. In den Abbildungen 6,7 und 8 sind die Abwicklungsfaktoren für das multidimensionale Credibility CL-Modell mit $\rho = 0.5$, $\rho = 0.9$ und $\rho = 1$ abgebildet. Man erkennt auch in diesen Diagrammen die Glättung der Abwicklungsfaktoren. Zudem fällt auch auf, dass sich die Faktoren der verschiedenen Gruppen, mit grösser werdendem Korrelationsparameter ρ , wieder auseinander bewegen und ein individuelles Niveau annehmen, welches jeweils mit dem der Abwicklungsfaktoren der klassischen CL-Methode der entsprechenden Gruppe vergleichbar ist. Dieser Effekt wird im Abschnitt 6.3 noch etwas genauer erläutert. Der Einfluss von ρ auf die strukturellen Parameter f_j ist nur sehr schwach. Die numerischen Werte der kollektiv geschätzten Faktoren f_j für die verschiedenen ρ , sowie alle Werte der Abwicklungsfaktoren die für die Abbildungen verwendet wurden, findet man im Anhang.

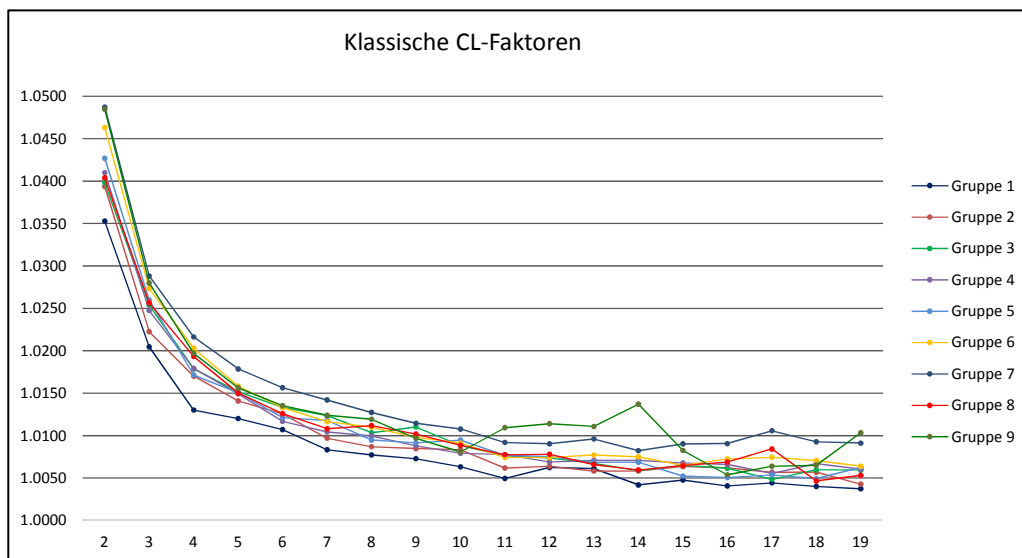


Abbildung 4: Klassische CL-Faktoren

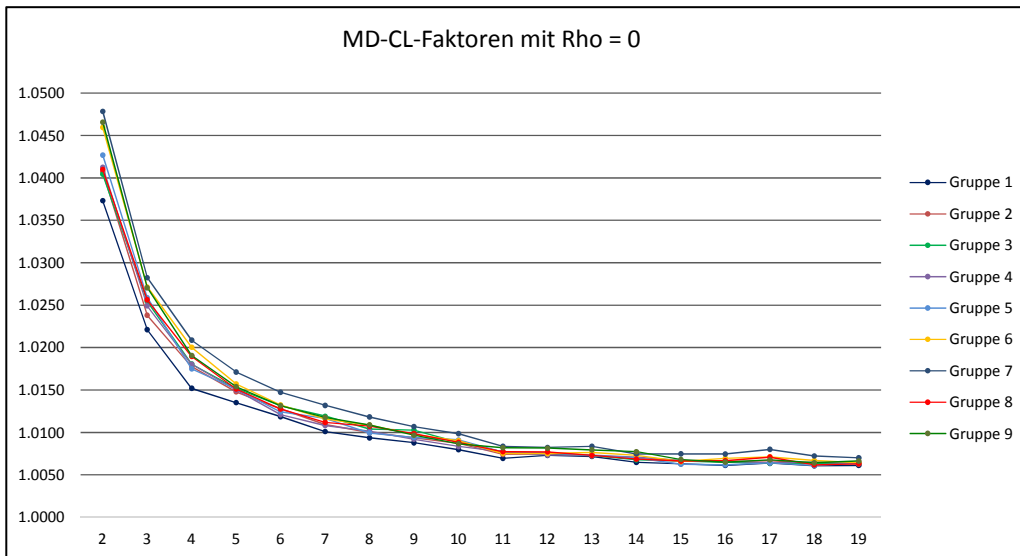


Abbildung 5: Credibility CL-Faktoren ($\rho = 0$)

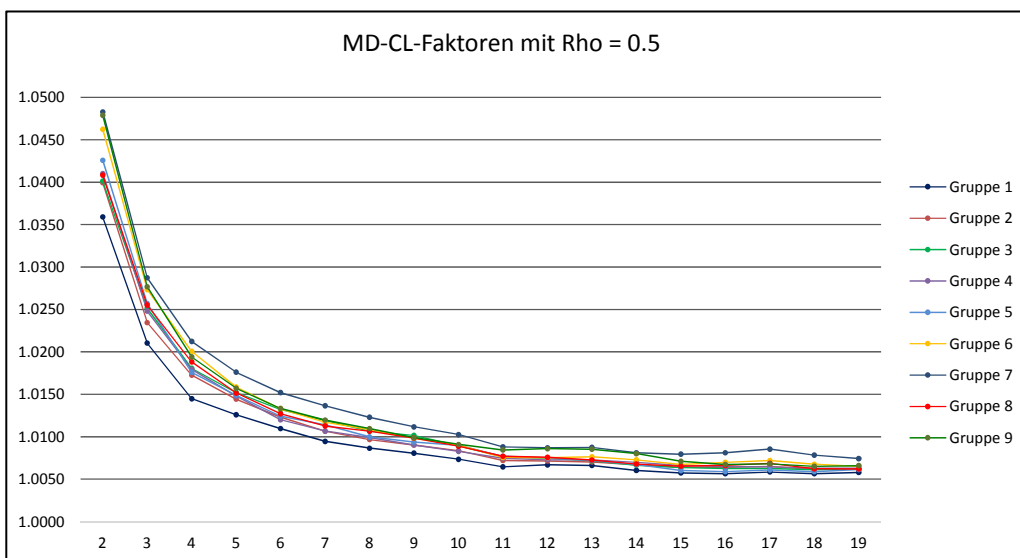


Abbildung 6: MD-Credibility CL-Faktoren mit $\rho = 0.5$

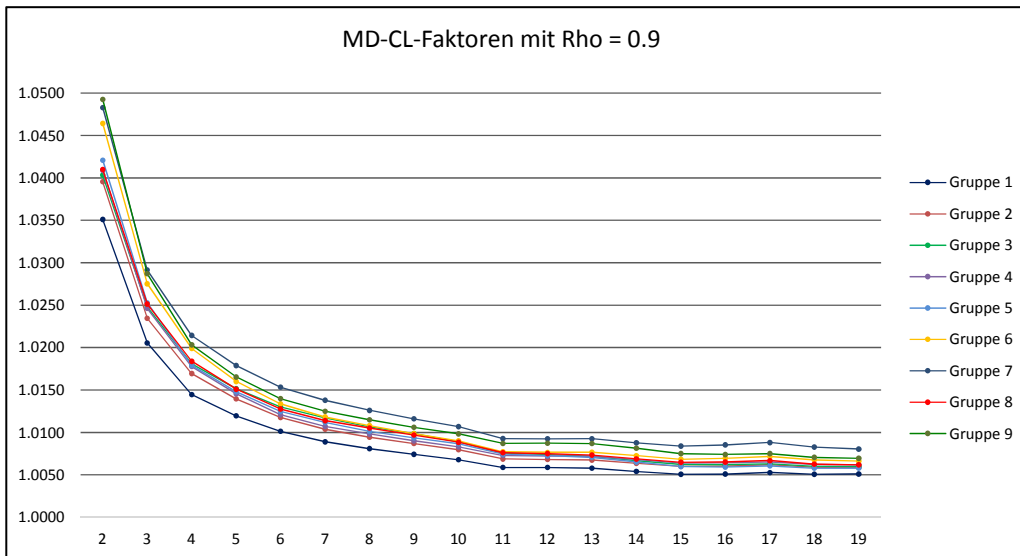


Abbildung 7: MD-Credibility CL-Faktoren mit $\rho = 0.9$

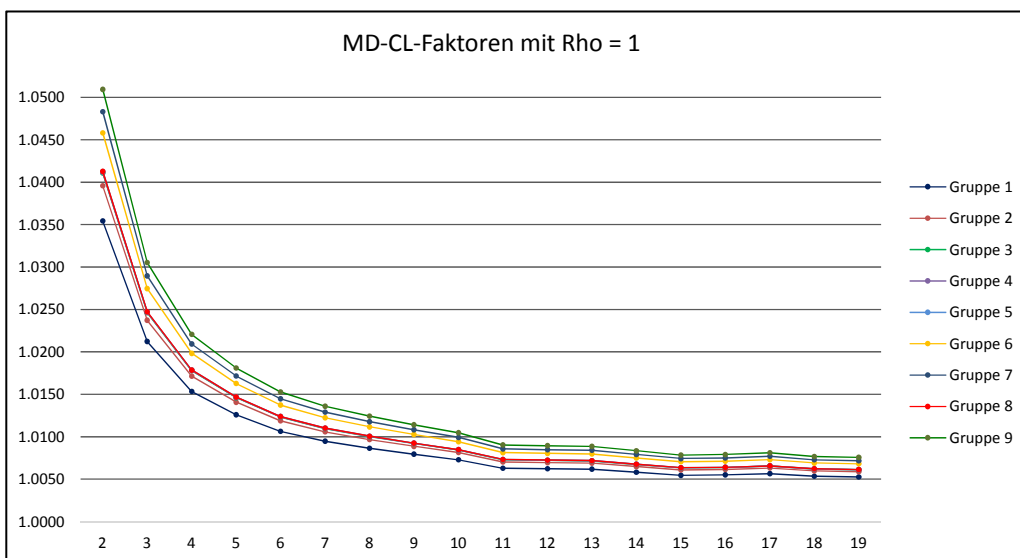


Abbildung 8: MD-Credibility CL-Faktoren mit $\rho = 1$

Bemerkungen:

- Geglättet werden die normalisierten Zufallsvariablen $\theta_j = \frac{F_j}{f_j}$ mit $E[\theta_j] =$
 1. Eine maximale Glättung würde man erhalten, wenn man $\text{Var}(\theta_0) = \text{Var}(\theta_1) = \dots = \text{Var}(\theta_{J-1}) = c$ für eine Konstante c wählen würde, was äquivalent zu $\tau_j^2 = cf_j^2$ ist. In diesem Falle erhielten wir für $\rho = 1$, dass $\theta_0 = \theta_1 = \dots = \theta_{J-1}$ fast sicher gälte. Die Annahme $\tau_j^2 = cf_j^2$ wäre natürlich auch dasselbe, wie wenn man den Variationskoeffizienten von F_j für alle $j = 0, \dots, J - 1$ als konstant annehmen würde. Solch eine Annahme ist jedoch eher unrealistisch.

6.3 Vergleich der verschiedenen Modelle anhand der Gruppen 9 und 7

Die nächsten Diagramme veranschaulichen den Einfluss der verschiedenen CL-Modelle auf die Abwicklungsfaktoren und das Abwicklungspattern der Gruppe 9. Betrachtet man die CL-Faktoren, die man mit dem klassischen CL-Modell erhält, fallen sofort die grossen Schwankungen (besonders in den Abwicklungsjahren $j = 11, \dots, j = 15$) auf. Diese resultieren aus einigen Ausreissern, was man aus den Daten im Anhang entnehmen kann. Mit dem Credibility CL-Modell werden diese Faktoren geglättet, da für die entsprechenden Jahre die Credibility-Gewichte klein werden und die kollektiven Faktoren somit mehr Gewicht erhalten. Dies erkennt man besonders gut anhand der Abbildung 9, bei der die Faktoren des Credibility CL-Modells zum Teil auf den kollektiv geschätzten Faktoren zu liegen kommen. Die Daten der Gruppe 9 werden mit diesem Modell jedoch stark vernachlässigt. Mit dem multidimensionalen Credibility CL-Modell und entsprechend gewähltem ρ , erhält das Beobachtungsdreieck der Gruppe 9 wieder mehr Gewicht, da durch die Korrelation der Abwicklungsfaktoren auch die Daten von anderen Spalten in die Schätzung miteinfließen. Der Glättungseffekt bleibt dabei erhalten und wird sogar noch leicht verstärkt.

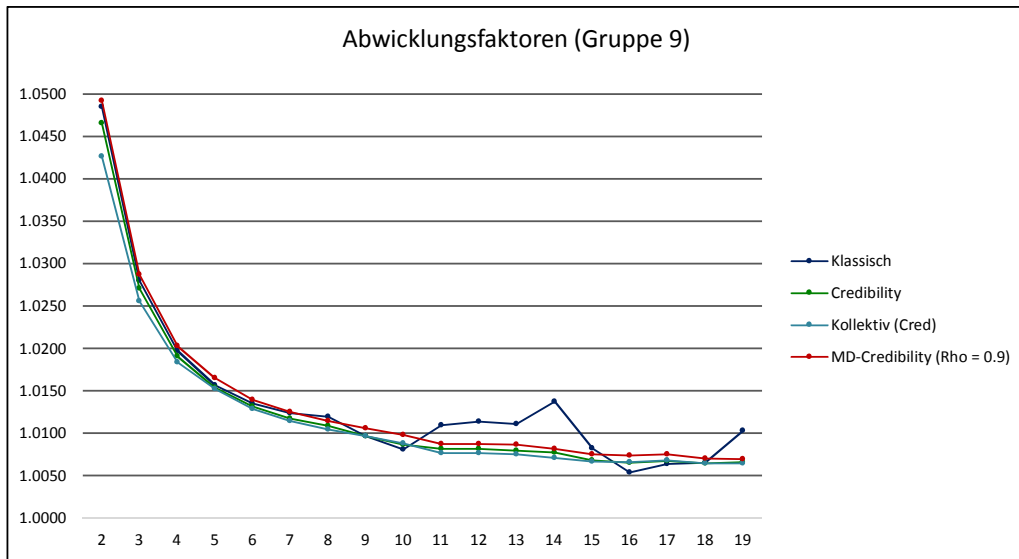


Abbildung 9: Verschiedene CL-Faktoren für die Gruppe 9

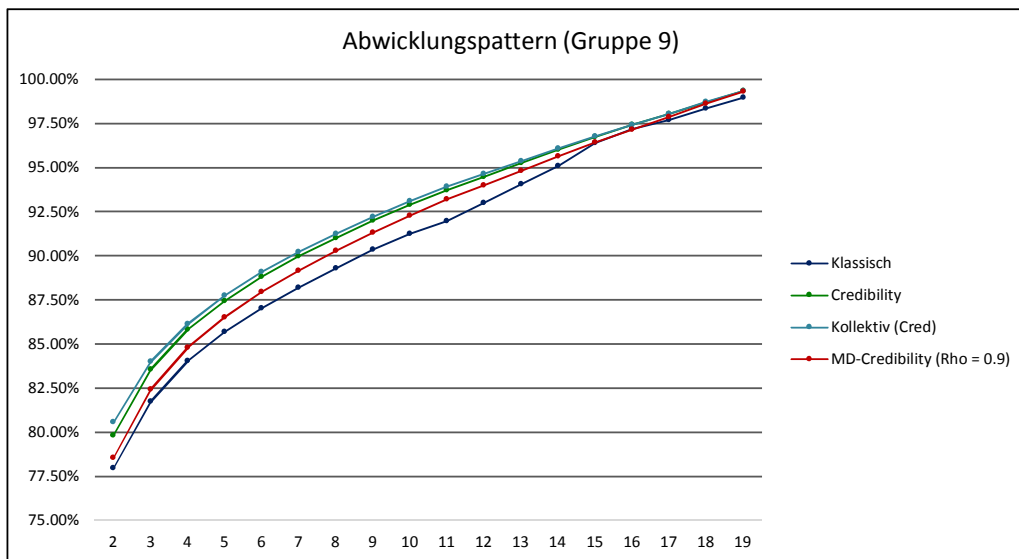


Abbildung 10: Verschiedene Abwicklungspattern für die Gruppe 9

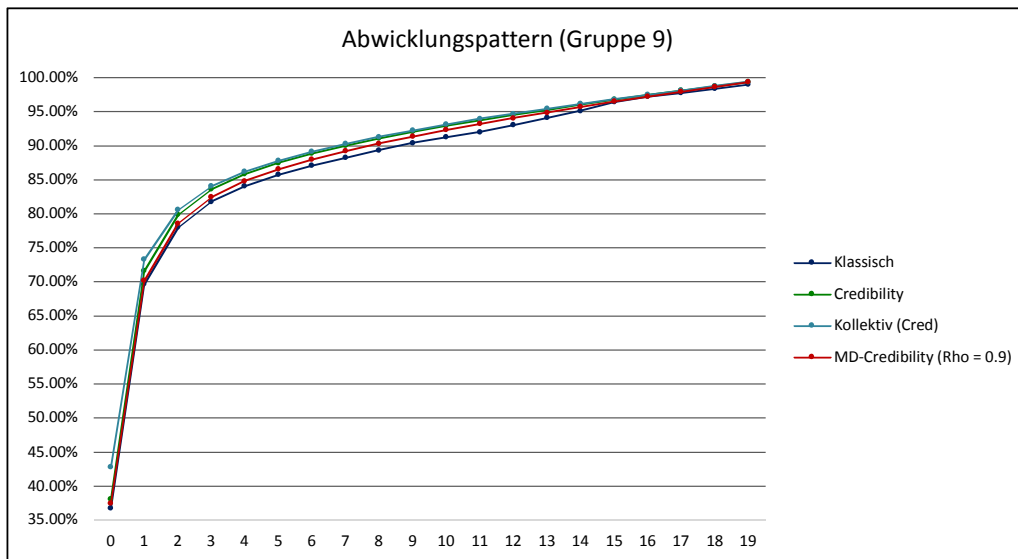


Abbildung 11: Verschiedene Abwicklungspattern für die Gruppe 9 (komplett)

Die Daten der Gruppe 7 sind vergleichsweise homogen. Man findet dort keine markanten Ausreisser. In der Abbildung 12 erkennt man, dass das Pattern des gewöhnlichen Credibility CL-Modells dennoch näher bei dem Pattern liegt, das aus den kollektiven Abwicklungsfaktoren erzeugt wurde. Mit dem multidimensionalen Credibility CL-Modell können wir durch die Wahl der Korrelation den Daten der Gruppe 7 jedoch noch mehr Gewicht geben. Dies ist anhand der Abbildungen 12 und 13 leicht erkennbar, wobei für ρ einmal 0.5 und einmal 0.9 gewählt wurde.

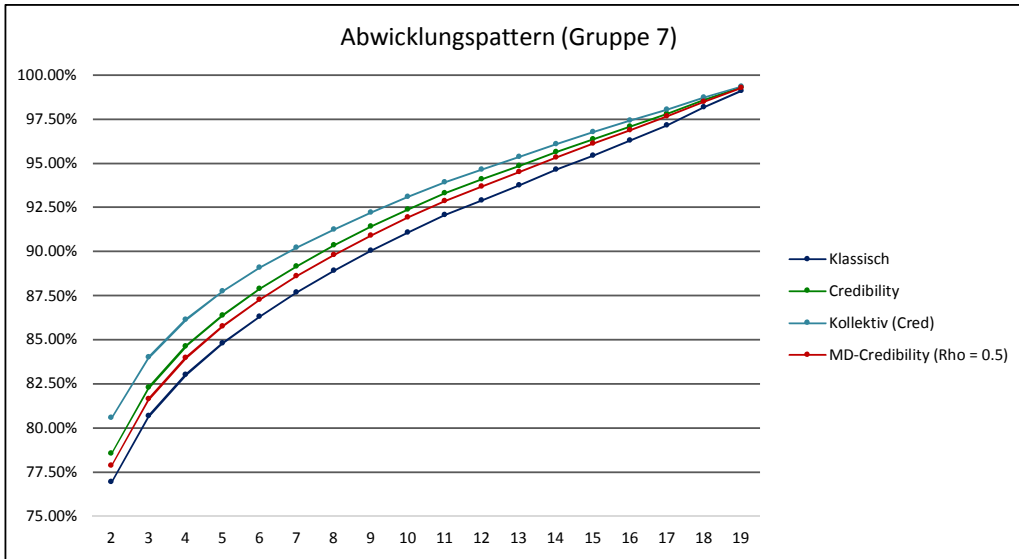


Abbildung 12: Verschiedene Abwicklungspattern für die Gruppe 7

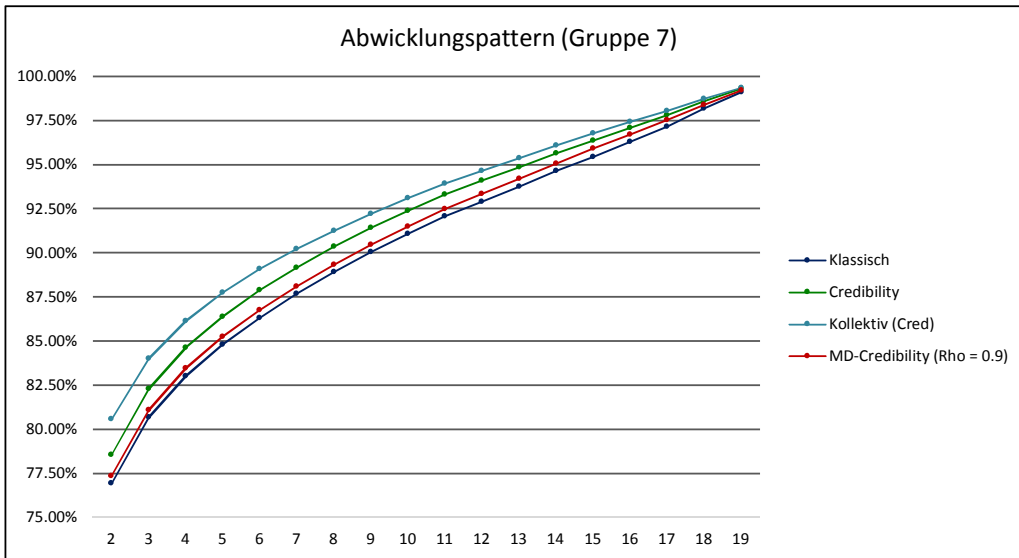


Abbildung 13: Verschiedene Abwicklungspattern für die Gruppe 7

6.4 Resultate zu den geschätzten Rückstellungen und zum MSEP

In diesem Abschnitt werden die geschätzten Rückstellungen sowie die zugehörigen geschätzten MSEP betrachtet. Die Tabelle links zeigt die Resultate, die man mit den Schätzern der klassischen CL-Methode aus Kapitel 2 erhält. Aufgelistet sind die geschätzten Rückstellungen und die $MSEP^{1/2}$ der einzelnen Gruppen sowie die des Totals. Für die Berechnung des totalen MSEP wurde angenommen, dass die Abwicklungsergebnisse der verschiedenen Gruppen unabhängig sind. Es handelt sich deshalb lediglich um die Aggregation der MSEP der einzelnen Gruppen. In der Tabelle rechts sind die entsprechenden Werte für das Gesamtdreieck, das aus den aufaddierten Gruppen besteht, das heisst, $C_{i,j}^{Gesamt} = \sum_{g=1}^G C_{i,j}^{(g)}$.

Klassisches CL-Modell				Klassisches CL-Modell (alle Gruppen aufaddiert)			
	Rückstellung:	MSEP ^{1/2} :	in %:		Rückstellung:	MSEP ^{1/2} :	in %:
Gruppe1:	31'223'126	1'292'218	4.14%	Total:	634'461'771	13'912'785	2.19%
Gruppe2:	17'535'010	857'618	4.89%				
Gruppe3:	49'844'945	1'904'371	3.82%				
Gruppe4:	87'320'345	2'582'873	2.96%				
Gruppe5:	69'304'388	2'202'062	3.18%				
Gruppe6:	148'688'966	4'195'630	2.82%				
Gruppe7:	126'428'287	4'661'112	3.69%				
Gruppe8:	46'108'858	1'698'888	3.68%				
Gruppe9:	66'697'056	5'032'584	7.55%				
Total:	643'150'982	9'224'678	1.43%				

Die folgenden Tabellen zeigen die Resultate, welche durch Anwendung des multidimensionalen Credibility CL-Modells aus Kapitel 5 resultieren. In den Tabellen links befinden sich jeweils die Werte, die durch die inhomogenen Schätzer entstehen, und rechts diejenigen, die durch die homogenen Schätzer entstehen.

MD-Credibility, Rho = 0, Inhomogen				MD-Credibility, Rho = 0, Homogen			
	Rückstellung:	MSEP ^{1/2} :	in %:		Rückstellung:	MSEP ^{1/2} :	in %:
Gruppe1:	37'835'132	1'670'656	4.42%	Gruppe1:	37'835'132	1'699'769	4.49%
Gruppe2:	19'334'462	1'115'018	5.77%	Gruppe2:	19'334'462	1'128'900	5.84%
Gruppe3:	51'410'467	1'888'611	3.67%	Gruppe3:	51'410'467	1'927'537	3.75%
Gruppe4:	89'196'251	2'570'545	2.88%	Gruppe4:	89'196'251	2'638'068	2.96%
Gruppe5:	72'237'198	2'302'564	3.19%	Gruppe5:	72'237'198	2'356'063	3.26%
Gruppe6:	146'967'012	3'279'370	2.23%	Gruppe6:	146'967'012	3'350'646	2.28%
Gruppe7:	113'784'704	2'824'441	2.48%	Gruppe7:	113'784'704	2'896'128	2.55%
Gruppe8:	46'989'655	1'815'670	3.86%	Gruppe8:	46'989'655	1'851'800	3.94%
Gruppe9:	59'409'271	2'042'602	3.44%	Gruppe9:	59'409'271	2'087'542	3.51%
Total:	637'164'152	6'761'016	1.06%	Total:	637'164'152	7'201'355	1.13%

MD-Credibility, Rho = 0.5, Inhomogen

	Rückstellung:	MSEP ^{1/2} :	in %:
Gruppe1:	35'621'073	1'737'832	4.88%
Gruppe2:	18'840'568	1'155'512	6.13%
Gruppe3:	50'876'921	1'988'284	3.91%
Gruppe4:	88'219'230	2'720'455	3.08%
Gruppe5:	71'101'431	2'429'056	3.42%
Gruppe6:	147'721'978	3'410'845	2.31%
Gruppe7:	118'502'784	3'009'087	2.54%
Gruppe8:	46'721'847	1'919'975	4.11%
Gruppe9:	60'851'275	2'218'957	3.65%
Total:	638'457'108	7'135'003	1.12%

MD-Credibility, Rho = 0.5, Homogen

	Rückstellung:	MSEP ^{1/2} :	in %:
Gruppe1:	35'621'073	1'760'597	4.94%
Gruppe2:	18'840'568	1'168'465	6.20%
Gruppe3:	50'876'921	2'016'128	3.96%
Gruppe4:	88'219'230	2'762'133	3.13%
Gruppe5:	71'101'431	2'464'637	3.47%
Gruppe6:	147'721'978	3'446'522	2.33%
Gruppe7:	118'502'784	3'052'734	2.58%
Gruppe8:	46'721'847	1'948'615	4.17%
Gruppe9:	60'851'275	2'261'387	3.72%
Total:	638'457'108	7'442'190	1.17%

MD-Credibility, Rho = 0.9, Inhomogen

	Rückstellung:	MSEP ^{1/2} :	in %:
Gruppe1:	33'292'924	1'810'813	5.44%
Gruppe2:	18'217'255	1'211'369	6.65%
Gruppe3:	50'531'910	2'083'281	4.12%
Gruppe4:	87'534'959	2'837'433	3.24%
Gruppe5:	70'280'863	2'537'212	3.61%
Gruppe6:	148'288'681	3'488'003	2.35%
Gruppe7:	122'474'359	3'151'749	2.57%
Gruppe8:	46'541'664	2'033'059	4.37%
Gruppe9:	63'237'994	2'463'184	3.90%
Total:	640'400'609	7'474'977	1.17%

MD-Credibility, Rho = 0.9, Homogen

	Rückstellung:	MSEP ^{1/2} :	in %:
Gruppe1:	33'292'924	1'824'921	5.48%
Gruppe2:	18'217'255	1'220'795	6.70%
Gruppe3:	50'531'910	2'099'675	4.16%
Gruppe4:	87'534'959	2'860'718	3.27%
Gruppe5:	70'280'863	2'557'563	3.64%
Gruppe6:	148'288'681	3'508'290	2.37%
Gruppe7:	122'474'359	3'175'828	2.59%
Gruppe8:	46'541'664	2'051'109	4.41%
Gruppe9:	63'237'994	2'495'455	3.95%
Total:	640'400'609	7'681'443	1.20%

Bemerkungen:

- Für die kollektiven Abwicklungsfaktoren \mathbf{f} wurden auch für die inhomogenen Credibility-Schätzer die Schätzer $\hat{\mathbf{f}}$ verwendet. Dies ist der Grund, weshalb die geschätzten Rückstellungen im homogenen und im inhomogenen Fall identisch sind.
- Da bei den Herleitungen der Formeln für die Schätzungen der MSEP verschiedene Approximationen verwendet wurden, sind die Resultate der Schätzgenauigkeit etwas optimistisch.
- Für $\rho = 0$ befinden wir uns auch im gewöhnlichen Credibility CL-Modell und können deshalb auch die Formeln aus Kapitel 4 für die Schätzung des MSEP verwenden, was jedoch keinen Einfluss auf die Ergebnisse hat.

Literatur

- [1] M.Buchwalder, H.Bühlmann, M.Merz, M.Wüthrich, (2006) *The Mean Square Error of Prediction in the Chain Ladder Reserving Method(Mack and Murphy Revisited)*. Astin Bulletin 36(2), pp. 521–542.
- [2] M.Buchwalder, H.Bühlmann, M.Merz, M.Wüthrich, (2006) *The Mean Square Error of Prediction in the Chain Ladder Reserving Method - Final Remark*. Astin Bulletin 36(2), p. 553.
- [3] H. Bühlmann, A. Gisler, (2005) *A Course in Credibility Theory and its Applications*. Universitext, Springer Verlag.
- [4] A.Gisler, (2006) *The Mean Square Error of Prediction in the Chain Ladder Reserving Method: A Bayesian Approach*. Astin Bulletin 36(2), pp. 554–565.
- [5] A. Gisler, M.V. Wüthrich, (2008) *Credibility for the Chain Ladder Reserving Method*. Astin Bulletin 38(2), pp. 565–600.
- [6] T. Mack, (1993) *Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates*. Astin Bulletin 23(2), pp. 213–225.
- [7] T. Mack, G.Quarg, C.Braun, (2006) *The Mean Square Error of Prediction in the Chain Ladder Reserving Method - A Comment*. Astin Bulletin 36(2), pp. 543–552.
- [8] A.E. Renshaw, R.J. Verrall, (1998) *A Stochastic Model underlying the Chain-Ladder Technique*. British Actuarial Journal 4, pp. 903–923.

Anhang

Berechnete Abwicklungsfaktoren

Klassische CL-Faktoren

	j =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Gruppe1:	f_{ij}^{CL}	1.6202	1.0820	1.0353	1.0205	1.0130	1.0120	1.0107	1.0083	1.0077	1.0073	1.0063	1.0050	1.0062	1.0061	1.0042	1.0048	1.0041	1.0044	1.0040	1.0037
Gruppe2:	f_{ij}^{CL}	1.6641	1.0957	1.0394	1.0223	1.0170	1.0141	1.0126	1.0097	1.0087	1.0085	1.0083	1.0062	1.0064	1.0058	1.0059	1.0064	1.0062	1.0057	1.0057	1.0043
Gruppe3:	f_{ij}^{CL}	1.6788	1.0896	1.0398	1.0254	1.0179	1.0152	1.0133	1.0124	1.0103	1.0110	1.0088	1.0076	1.0074	1.0067	1.0059	1.0065	1.0062	1.0048	1.0060	1.0059
Gruppe4:	f_{ij}^{CL}	1.6916	1.0933	1.0410	1.0248	1.0179	1.0149	1.0117	1.0104	1.0100	1.0088	1.0079	1.0078	1.0069	1.0071	1.0071	1.0068	1.0066	1.0055	1.0067	1.0061
Gruppe5:	f_{ij}^{CL}	1.6771	1.0969	1.0427	1.0260	1.0171	1.0151	1.0121	1.0118	1.0095	1.0092	1.0095	1.0077	1.0075	1.0069	1.0069	1.0052	1.0051	1.0054	1.0049	1.0063
Gruppe6:	f_{ij}^{CL}	1.7592	1.1121	1.0463	1.0273	1.0203	1.0158	1.0133	1.0117	1.0110	1.0098	1.0091	1.0074	1.0074	1.0077	1.0075	1.0065	1.0073	1.0075	1.0071	1.0064
Gruppe7:	f_{ij}^{CL}	1.7583	1.1125	1.0487	1.0288	1.0216	1.0179	1.0156	1.0142	1.0127	1.0115	1.0108	1.0092	1.0090	1.0096	1.0082	1.0090	1.0091	1.0106	1.0093	1.0091
Gruppe8:	f_{ij}^{CL}	1.6729	1.0928	1.0404	1.0257	1.0194	1.0150	1.0126	1.0108	1.0112	1.0102	1.0089	1.0078	1.0078	1.0066	1.0060	1.0065	1.0069	1.0084	1.0047	1.0053
Gruppe9:	f_{ij}^{CL}	1.8955	1.1203	1.0485	1.0280	1.0197	1.0156	1.0135	1.0124	1.0119	1.0097	1.0081	1.0109	1.0114	1.0111	1.0137	1.0082	1.0054	1.0064	1.0065	1.0103

Klassische CL-Faktoren

Credibility CL-Faktoren (Rho = 0)

	j =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Gruppe1:	f_{ij}^{MD}	1.6261	1.0854	1.0373	1.0221	1.0152	1.0135	1.0119	1.0101	1.0094	1.0088	1.0080	1.0070	1.0073	1.0072	1.0065	1.0063	1.0061	1.0064	1.0061	1.0061
Gruppe2:	f_{ij}^{MD}	1.6698	1.0969	1.0407	1.0238	1.0178	1.0148	1.0128	1.0109	1.0100	1.0094	1.0087	1.0074	1.0074	1.0072	1.0069	1.0066	1.0066	1.0067	1.0064	1.0063
Gruppe3:	f_{ij}^{MD}	1.6806	1.0911	1.0404	1.0254	1.0180	1.0152	1.0131	1.0119	1.0104	1.0103	1.0088	1.0077	1.0076	1.0073	1.0068	1.0066	1.0065	1.0064	1.0063	1.0064
Gruppe4:	f_{ij}^{MD}	1.6923	1.0940	1.0412	1.0249	1.0180	1.0150	1.0121	1.0108	1.0102	1.0092	1.0084	1.0077	1.0073	1.0073	1.0071	1.0067	1.0066	1.0064	1.0065	1.0064
Gruppe5:	f_{ij}^{MD}	1.6785	1.0973	1.0427	1.0259	1.0175	1.0151	1.0124	1.0117	1.0100	1.0094	1.0091	1.0077	1.0076	1.0073	1.0070	1.0063	1.0062	1.0064	1.0061	1.0064
Gruppe6:	f_{ij}^{MD}	1.7583	1.1114	1.0460	1.0271	1.0200	1.0157	1.0132	1.0116	1.0109	1.0098	1.0090	1.0075	1.0075	1.0076	1.0073	1.0066	1.0070	1.0071	1.0067	1.0064
Gruppe7:	f_{ij}^{MD}	1.7568	1.1112	1.0478	1.0282	1.0209	1.0171	1.0147	1.0132	1.0118	1.0107	1.0099	1.0084	1.0082	1.0084	1.0075	1.0075	1.0075	1.0080	1.0072	1.0070
Gruppe8:	f_{ij}^{MD}	1.6754	1.0941	1.0410	1.0256	1.0190	1.0151	1.0128	1.0112	1.0108	1.0099	1.0088	1.0077	1.0077	1.0073	1.0069	1.0066	1.0067	1.0071	1.0062	1.0063
Gruppe9:	f_{ij}^{MD}	1.8796	1.1155	1.0466	1.0271	1.0191	1.0154	1.0131	1.0118	1.0109	1.0097	1.0087	1.0082	1.0082	1.0080	1.0077	1.0068	1.0065	1.0068	1.0064	1.0066

Credibility CL-Faktoren ($\rho = 0$)

MD Credibility CL-Faktoren mit Rho = 0.5

	j =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Gruppe1:	f_{ij}^{MD}	1.6233	1.0838	1.0359	1.0210	1.0145	1.0126	1.0110	1.0095	1.0087	1.0081	1.0074	1.0065	1.0067	1.0066	1.0060	1.0057	1.0056	1.0059	1.0056	1.0058
Gruppe2:	f_{ij}^{MD}	1.6692	1.0952	1.0400	1.0235	1.0173	1.0144	1.0123	1.0107	1.0097	1.0090	1.0084	1.0072	1.0072	1.0070	1.0067	1.0064	1.0064	1.0065	1.0062	1.0062
Gruppe3:	f_{ij}^{MD}	1.6791	1.0909	1.0401	1.0251	1.0180	1.0152	1.0132	1.0119	1.0107	1.0102	1.0089	1.0077	1.0074	1.0072	1.0067	1.0064	1.0063	1.0062	1.0061	1.0062
Gruppe4:	f_{ij}^{MD}	1.6917	1.0939	1.0410	1.0248	1.0179	1.0148	1.0120	1.0107	1.0099	1.0090	1.0083	1.0075	1.0073	1.0073	1.0070	1.0066	1.0065	1.0064	1.0063	1.0063
Gruppe5:	f_{ij}^{MD}	1.6785	1.0971	1.0426	1.0257	1.0176	1.0149	1.0124	1.0114	1.0100	1.0094	1.0090	1.0077	1.0075	1.0072	1.0067	1.0060	1.0059	1.0061	1.0059	1.0061
Gruppe6:	f_{ij}^{MD}	1.7591	1.1115	1.0462	1.0273	1.0201	1.0159	1.0133	1.0117	1.0108	1.0098	1.0090	1.0076	1.0075	1.0076	1.0073	1.0067	1.0070	1.0072	1.0068	1.0065
Gruppe7:	f_{ij}^{MD}	1.7582	1.1117	1.0483	1.0287	1.0212	1.0176	1.0152	1.0137	1.0123	1.0112	1.0103	1.0088	1.0087	1.0087	1.0081	1.0080	1.0081	1.0085	1.0078	1.0074
Gruppe8:	f_{ij}^{MD}	1.6744	1.0936	1.0408	1.0255	1.0188	1.0152	1.0127	1.0113	1.0107	1.0099	1.0089	1.0077	1.0076	1.0073	1.0068	1.0065	1.0066	1.0069	1.0062	1.0062
Gruppe9:	f_{ij}^{MD}	1.8823	1.1183	1.0479	1.0277	1.0194	1.0157	1.0133	1.0120	1.0110	1.0099	1.0091	1.0084	1.0086	1.0085	1.0080	1.0071	1.0067	1.0068	1.0065	1.0066

MD-Credibility CL-Faktoren mit $\rho = 0.5$

MD Credibility CL-Faktoren mit Rho = 0.9

	j =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Gruppe1:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.6175	1.0837	1.0351	1.0206	1.0145	1.0120	1.0101	1.0089	1.0081	1.0074	1.0068	1.0059	1.0059	1.0058	1.0054	1.0051	1.0051	1.0053	1.0051	1.0051
Gruppe2:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.6678	1.0936	1.0396	1.0235	1.0169	1.0140	1.0118	1.0104	1.0094	1.0087	1.0080	1.0069	1.0068	1.0067	1.0064	1.0060	1.0060	1.0062	1.0059	1.0059
Gruppe3:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.6764	1.0928	1.0403	1.0248	1.0181	1.0151	1.0130	1.0117	1.0107	1.0098	1.0089	1.0076	1.0074	1.0072	1.0067	1.0062	1.0062	1.0063	1.0060	1.0060
Gruppe4:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.6900	1.0948	1.0409	1.0246	1.0178	1.0146	1.0121	1.0107	1.0098	1.0090	1.0083	1.0073	1.0072	1.0072	1.0068	1.0064	1.0064	1.0065	1.0062	1.0062
Gruppe5:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.6801	1.0969	1.0421	1.0253	1.0179	1.0148	1.0125	1.0112	1.0101	1.0094	1.0087	1.0074	1.0073	1.0071	1.0065	1.0060	1.0059	1.0061	1.0058	1.0058
Gruppe6:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.7612	1.1104	1.0464	1.0275	1.0199	1.0160	1.0134	1.0118	1.0108	1.0099	1.0090	1.0077	1.0077	1.0077	1.0073	1.0068	1.0070	1.0072	1.0068	1.0066
Gruppe7:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.7622	1.1112	1.0483	1.0291	1.0214	1.0179	1.0153	1.0138	1.0126	1.0116	1.0107	1.0093	1.0092	1.0093	1.0088	1.0084	1.0085	1.0088	1.0083	1.0080
Gruppe8:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.6744	1.0945	1.0410	1.0252	1.0184	1.0151	1.0128	1.0114	1.0105	1.0097	1.0089	1.0076	1.0075	1.0074	1.0069	1.0065	1.0065	1.0067	1.0063	1.0062
Gruppe9:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.8758	1.1194	1.0492	1.0287	1.0203	1.0165	1.0140	1.0125	1.0115	1.0106	1.0098	1.0087	1.0087	1.0087	1.0081	1.0075	1.0074	1.0075	1.0071	1.0070

MD-Credibility CL-Faktoren mit $\rho = 0.9$

MD Credibility CL-Faktoren mit Rho = 1

	j =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Gruppe1:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.5866	1.0829	1.0354	1.0212	1.0153	1.0126	1.0106	1.0095	1.0086	1.0079	1.0073	1.0063	1.0062	1.0062	1.0058	1.0055	1.0055	1.0056	1.0053	1.0053
Gruppe2:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.6553	1.0927	1.0396	1.0237	1.0172	1.0141	1.0119	1.0106	1.0097	1.0089	1.0081	1.0070	1.0070	1.0069	1.0065	1.0061	1.0061	1.0063	1.0060	1.0059
Gruppe3:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.6799	1.0962	1.0411	1.0246	1.0178	1.0146	1.0123	1.0110	1.0100	1.0092	1.0084	1.0073	1.0072	1.0072	1.0067	1.0063	1.0064	1.0065	1.0062	1.0061
Gruppe4:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.6812	1.0963	1.0412	1.0247	1.0178	1.0146	1.0123	1.0110	1.0100	1.0092	1.0085	1.0073	1.0072	1.0072	1.0068	1.0063	1.0064	1.0066	1.0062	1.0061
Gruppe5:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.6827	1.0965	1.0413	1.0247	1.0179	1.0147	1.0124	1.0110	1.0101	1.0093	1.0085	1.0073	1.0072	1.0072	1.0068	1.0064	1.0064	1.0066	1.0062	1.0061
Gruppe6:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.7577	1.1072	1.0458	1.0275	1.0198	1.0163	1.0137	1.0122	1.0112	1.0103	1.0094	1.0081	1.0080	1.0080	1.0075	1.0071	1.0071	1.0073	1.0069	1.0068
Gruppe7:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.7989	1.1130	1.0483	1.0290	1.0209	1.0172	1.0145	1.0129	1.0118	1.0108	1.0099	1.0086	1.0085	1.0084	1.0079	1.0074	1.0075	1.0077	1.0073	1.0072
Gruppe8:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.6828	1.0966	1.0413	1.0247	1.0179	1.0147	1.0124	1.0110	1.0101	1.0093	1.0085	1.0073	1.0072	1.0072	1.0068	1.0064	1.0064	1.0066	1.0062	1.0061
Gruppe9:	$\hat{\rho}_j^{MD}$	1.8423	1.1192	1.0509	1.0305	1.0221	1.0181	1.0153	1.0136	1.0124	1.0114	1.0105	1.0090	1.0089	1.0089	1.0083	1.0078	1.0079	1.0081	1.0077	1.0076

MD-Credibility CL-Faktoren mit $\rho = 1$

Kollektive Schätzungen der CL-Faktoren (Strukturelle Parameter)

	j =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Rho = 0:	\hat{f}_j	1.7130	1.0996	1.0426	1.0256	1.0184	1.0152	1.0129	1.0115	1.0105	1.0097	1.0088	1.0077	1.0077	1.0075	1.0071	1.0067	1.0066	1.0068	1.0064	1.0064
Rho = 0.5:	\hat{f}_j	1.7129	1.0996	1.0425	1.0255	1.0183	1.0151	1.0128	1.0114	1.0104	1.0096	1.0088	1.0077	1.0076	1.0075	1.0070	1.0066	1.0066	1.0067	1.0064	1.0064
Rho = 0.9:	\hat{f}_j	1.7117	1.0997	1.0425	1.0255	1.0184	1.0151	1.0128	1.0114	1.0104	1.0096	1.0088	1.0076	1.0075	1.0074	1.0070	1.0065	1.0066	1.0067	1.0064	1.0063
Rho = 1:	\hat{f}_j	1.7075	1.1001	1.0428	1.0256	1.0185	1.0152	1.0128	1.0114	1.0104	1.0096	1.0088	1.0076	1.0075	1.0074	1.0070	1.0066	1.0066	1.0068	1.0065	1.0064

Kollektive Schätzungen der Abwicklungsfaktoren (Strukturelle Parameter)
mit $\rho \in \{0, 0.5, 0.9, 1\}$

Verwendete Daten

Auf den folgenden Seiten findet man die Daten, welche für die numerischen Beispiele verwendet wurden. Es handelt sich um reale Daten aus der Unfallversicherung, welche in 9 Gruppen eingeteilt sind.

Gruppe 5:

Table with 20 columns and 20 rows, containing numerical data for Gruppe 5. The table shows values ranging from approximately 11,609.43 to 145,146.

Gruppe 6:

Table with 20 columns and 20 rows, containing numerical data for Gruppe 6. The table shows values ranging from approximately 11,609.43 to 357,783.

Gruppe 7: Table with columns 0-20 and rows 1984-2010. Values range from 0 to 257058.

Gruppe 8: Table with columns 0-20 and rows 1984-2010. Values range from 0 to 257058.

Gruppe 9:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1984	1323895	905947	142921	921402	40112	54154	34335	89260	72709	93101	119472	30775	97047	237314	86851	112138	145532	46176	72901	78258	90663
1985	1430229	1365455	246728	93821	94500	168901	126371	55761	290659	32362	61510	97500	323936	197799	328185	480777	100598	101588	122086	105560	178803
1986	1612186	1358201	273127	108009	60897	56653	98642	50623	41153	20683	18093	31157	21330	36092	59472	5829	16870	8483	12732	14266	6530
1987	2072892	1382620	266975	95498	43747	74150	35975	23671	19866	31001	10931	40880	19969	7217	16470	12974	44255	20682	11576	12877	6792
1988	2672544	1784767	408640	94158	94869	31740	48740	35325	87376	148828	24138	20035	13902	19755	11864	9867	12683	21684	27123	13999	22151
1989	2318183	1811632	408285	164142	56533	78315	63232	49354	18424	31088	5664	2962	1695	43309	11864	9867	39169	28909	4912	13999	22151
1990	3052102	1847534	471098	229050	134613	77240	53080	67423	47707	77941	60264	23351	1695	46465	19230	30327	39169	17075	20882	18391	53218
1991	2649412	1650853	464841	189394	102488	151886	151886	59272	125678	86141	48586	62172	33495	27786	45359	45376	4756	17075	20882	18391	53218
1992	2778778	2055659	448208	215012	131685	40410	68444	70255	84194	100296	92389	31212	33124	18591	32808	32808	25279	21230	13036	13036	13036
1993	2492350	1851549	438231	186149	64986	73899	84194	38202	36168	82920	39443	11208	31260	28064	7779	4756	17136	13781	16420	16420	16420
1994	3025585	3449503	417442	242455	74174	60336	56359	257971	98789	139175	100945	59156	67773	81486	97457	61007	45267				
1995	4154240	2377219	844223	418184	263175	176725	164351	150122	234865	212874	149146	173836	117552	84721	83881	128512					
1996	3489520	2778885	789968	322775	130276	140112	99981	63474	50605	34393	27545	25271	29056	70405	63834						
1997	3556533	3532750	723179	232393	238259	141652	96972	74201	80762	46774	72146	58427	71945	104454	62252						
1998	4741943	4077016	1002523	533896	306448	338432	287620	220729	141029	121082	119767	82234	104454								
1999	6508078	5317965	1373022	689821	387914	297463	280313	207561	192348	137016	158684	130097									
2000	6708359	6737432	1773207	642172	333279	258664	268871	207302	174782	165301	115723										
2001	6283227	5699505	1569514	727357	345214	331503	223644	101112	82930	109979											
2002	6297211	6513111	1355626	717103	443269	241853	162720	242433	88370												
2003	6369391	6722967	1385363	740886	370081	341281	147930														
2004	7735298	7603797	1935126	902759	606005	464409	337041														
2005	9021726	8393518	2480455	1252420	879161	494581															
2006	10311292	10904098	3314330	1593129	1076998																
2007	10945030	10401288	3314330	1593129	1076998																
2008	12073200	10200525	2299429	1005407																	
2009	10666566	10528808	2896246																		
2010	12384800																				