



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Credibility in der Kollektiv-Lebensversicherung

DIPLOMARBEIT

am Departement Mathematik der ETH Zürich

Eingereicht von:

Manuel Tschupp

Betreuer:

Prof. Dr. Alois Gisler

ETH Zürich, AXA Winterthur

Dr. Frank Weber

AXA Winterthur

Zürich, 7. Februar 2008

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	xiii
I Grundlagen	1
1 Credibility-Schätzer	3
1.1 Definition und wichtige Resultate	3
1.2 Einfaches Bühlmann-Modell und intuitives Prinzip	5
2 Modell von Bühlmann-Straub	9
2.1 Formales Modell und Credibility-Schätzer	9
2.2 Schätzung der Strukturparameter	11
2.3 Bekannte a priori-Unterschiede	12
II Theoretischer Teil	13
3 Credibility mit exogener Information	15
3.1 Motivation	15
3.2 Formales Modell für ein einzelnes Risiko	16
3.3 Eigenschaften des Credibility-Schätzers	19
3.4 Bühlmann-Straub als Spezialfall	20
3.4.1 Der inhomogene Bühlmann-Straub-Schätzer	20
3.4.2 Der homogene Bühlmann-Straub-Schätzer	21
4 Erweiterung auf ein Kollektiv von Risiken	27
4.1 Bühlmann-Straub mit exogener Information	27
4.2 Eigenschaften der Credibility-Schätzer	34
4.3 Bühlmann-Straub als Spezialfall	37
4.3.1 Der inhomogene Bühlmann-Straub-Schätzer	37
4.3.2 Der homogene Bühlmann-Straub-Schätzer	38
4.4 Restriktion auf ein spezielles Risiko	39
4.4.1 Der homogene Credibility-Schätzer für ein singuläres Kollektiv	39
4.4.2 Konsistenz zum Modell eines einzelnen Risikos	40

5	Zeitinhomogene Credibility	43
5.1	Motivation für evolutionäre Modelle	43
5.2	Formales Modell und Credibility-Schätzer	45
5.3	Eigenschaften der Credibility-Schätzer	48
5.4	Kompatibilität zu Bühlmann-Straub	52
5.5	Alternative Strukturparameterschätzung	53
5.5.1	Motivation	53
5.5.2	Strukturparameterschätzung mittels Regression	54
III	Praktischer Teil	59
6	Die vorliegende Situation	61
6.1	Standardtarif und risikogerechtes Pricing im Kollektiv-Leben	61
6.1.1	Standardtarif	61
6.1.2	Risikogerechter Ab- und Aufschlag	62
6.1.3	Vorkonditionierung mittels Risikoklassen	62
6.2	Credibility im risikogerechten Pricing	63
6.2.1	Motivation	63
6.2.2	Inhomogene Schadenbeobachtung	63
6.2.3	Elimination der Zeitinhomogenität	65
7	Praktischer Einsatz von Credibility	67
7.1	Invalidenquoten-Modell	67
7.1.1	Motivation	67
7.1.2	Formales Modell	68
7.1.3	Resultate	70
7.2	Schadenquoten-Modell	83
7.2.1	Motivation	83
7.2.2	Formales Modell	83
7.2.3	Resultate	85
7.3	Gewichtetes Invalidenquoten-Modell	95
7.3.1	Motivation	95
7.3.2	Formales Modell	95
7.3.3	Resultate	96
7.4	Schadenraten-Modell	105
7.4.1	Motivation	105
7.4.2	Formales Modell	105
7.4.3	Resultate	106
7.5	Strukturparameterschätzung im evolutionären Modell	114
8	Doppelte Bestrafung und Belohnung	117
8.1	Hintergrund des Problems	117
8.2	Lösung des Problems	120
8.3	Korrigiertes Invalidenquoten-Modell	121
8.4	Korrigiertes Schadenraten-Modell	128

9 Eine neue Risikoklassenzuteilung	133
9.1 Motivation	133
9.2 Risikoklassen-Zuordnung	133
9.3 Ermittlung der Klassen-Tariffaktoren	134
9.4 Resultat	134
Literaturverzeichnis	135
Index	136
IV SAS-Programmcode	137

Tabellenverzeichnis

7.1	Durchschnittliche Invalidenquoten	71
7.2	A priori erwartete Anzahl Invalide	71
7.3	Gewichtete Statistik der Beobachtungsvektorkomponenten	72
7.4	Gewichtete suffiziente Statistik	72
7.5	Geschätzte innere Varianz je Risikoklasse	73
7.6	Geschätzte äussere Varianz je Risikoklasse	73
7.7	Credibility-Koeffizient je Risikoklasse	74
7.8	Gewichtete Statistik der Credibility-Gewichte je Risikoklasse	74
7.9	Statistik der Credibility-Schätzer je Risikoklasse	74
7.10	Gewichtete Statistik der Tariffaktoren je Risikoklasse	75
7.11	Durchschnittliche Schadenquoten	85
7.12	A priori erwartete Schadensumme	86
7.13	Gewichtete Statistik der Beobachtungsvektorkomponenten	86
7.14	Gewichtete suffiziente Statistik	86
7.15	Geschätzte innere Varianz je Risikoklasse	87
7.16	Geschätzte äussere Varianz je Risikoklasse	87
7.17	Credibility-Koeffizient je Risikoklasse	87
7.18	Gewichtete Statistik der Credibility-Gewichte je Risikoklasse	88
7.19	Statistik der Credibility-Schätzer je Risikoklasse	88
7.20	Gewichtete Statistik der Tariffaktoren je Risikoklasse	88
7.21	Durchschnittliche gewichtete Invalidenquoten	97
7.22	A priori erwartete Anzahl gewichtete Invalide	97
7.23	Gewichtete Statistik der Beobachtungsvektorkomponenten	97
7.24	Gewichtete suffiziente Statistik	97
7.25	Geschätzte innere Varianz je Risikoklasse	97
7.26	Geschätzte äussere Varianz je Risikoklasse	97
7.27	Credibility-Koeffizient je Risikoklasse	98
7.28	Gewichtete Statistik der Credibility-Gewichte je Risikoklasse	98
7.29	Statistik der Credibility-Schätzer je Risikoklasse	98
7.30	Gewichtete Statistik der Tariffaktoren je Risikoklasse	98
7.31	Durchschnittliche Schadenraten	106
7.32	A priori erwartete Schadensumme	106
7.33	Gewichtete Statistik der Beobachtungsvektorkomponenten	106
7.34	Gewichtete suffiziente Statistik	107
7.35	Geschätzte innere Varianz je Risikoklasse	107
7.36	Geschätzte äussere Varianz je Risikoklasse	107
7.37	Credibility-Koeffizient je Risikoklasse	107
7.38	Gewichtete Statistik der Credibility-Gewichte je Risikoklasse	107

7.39	Statistik der Credibility-Schätzer je Risikoklasse	107
7.40	Gewichtete Statistik der Tariffaktoren je Risikoklasse	108
7.41	Strukturparameterschätzer klassisch und mittels Regression	114
8.1	Durchschnittliche korrigierte a priori erwartete Anzahl Invalide . . .	121
8.2	Geschätzte innere Varianz je Risikoklasse	122
8.3	Geschätzte äussere Varianz je Risikoklasse	122
8.4	Credibility-Koeffizient je Risikoklasse	122
8.5	Gewichtete Statistik der Tariffaktoren je Risikoklasse	123
8.6	Korrigierte a priori erwartete Anzahl Invalide	128
8.7	Geschätzte innere Varianz je Risikoklasse	128
8.8	Geschätzte äussere Varianz je Risikoklasse	128
8.9	Credibility-Koeffizient je Risikoklasse	129
8.10	Gewichtete Statistik der Tariffaktoren je Risikoklasse	129
9.1	Standard-Tarifniveaus der drei Risikoklassen	134

Abbildungsverzeichnis

5.1	Schwankung der Beobachtungen um die korrekte individuelle Prämie in der klassischen Situation	44
5.2	Schwankung der Beobachtungen um die korrekte individuelle Prämie in der zeitinhomogenen Situation	44
5.3	Zeitinhomogenes Modell als dreistufiges hierarchisches Credibility-Modell	46
5.4	Lineare Regression zur Schätzung der Strukturparameter	57
6.1	Theoretischer Konjunkturverlauf	64
7.1	Credibility-Gewichte nach Personenjahren	78
7.2	Credibility-Schätzer nach Personenjahren	79
7.3	Credibility-Faktor der Risikoklasse 1 nach Personenjahren	80
7.4	Credibility-Faktor der Risikoklasse 2 nach Personenjahren	81
7.5	Credibility-Faktor der Risikoklasse 3 nach Personenjahren	82
7.6	Credibility-Gewichte nach Prämien-summe	90
7.7	Credibility-Schätzer nach Prämien-summe	91
7.8	Credibility-Faktor der Risikoklasse 1 nach Prämien-summe	92
7.9	Credibility-Faktor der Risikoklasse 2 nach Prämien-summe	93
7.10	Credibility-Faktor der Risikoklasse 3 nach Prämien-summe	94
7.11	Credibility-Gewichte nach Personenjahren	100
7.12	Credibility-Schätzer nach Personenjahren	101
7.13	Credibility-Faktor der Risikoklasse 1 nach Personenjahren	102
7.14	Credibility-Faktor der Risikoklasse 2 nach Personenjahren	103
7.15	Credibility-Faktor der Risikoklasse 3 nach Personenjahren	104
7.16	Credibility-Gewichte nach Personenjahren	109
7.17	Credibility-Gewichte nach Personenjahren	110
7.18	Credibility-Faktor der Risikoklasse 1 nach Personenjahren	111
7.19	Credibility-Faktor der Risikoklasse 2 nach Personenjahren	112
7.20	Credibility-Faktor der Risikoklasse 3 nach Personenjahren	113
7.21	Regressionsgerade zur Strukturparameterschätzung in RK 1	115
7.22	Regressionsgerade zur Strukturparameterschätzung in RK 2	115
7.23	Regressionsgerade zur Strukturparameterschätzung in RK 3	116
8.1	Invalidisierungswahrscheinlichkeit nach Alter (Männer)	118
8.2	Invalidisierungswahrscheinlichkeit nach Alter (Frauen)	119
8.3	Barwertfaktor nach Alter	119
8.4	Prämien-satz Standardtarif nach Alter	120

8.5	Korrigierte Credibility-Gewichte nach Personenjahren	124
8.6	Korrigierter Credibility-Faktor der RK 1 nach Personenjahren . . .	125
8.7	Korrigierter Credibility-Faktor der RK 2 nach Personenjahren . . .	126
8.8	Korrigierter Credibility-Faktor der RK 3 nach Personenjahren . . .	127
8.9	Korrigierte Credibility-Gewichte nach Prämien­summe	130
8.10	Korrigierter Credibility-Faktor aller Klassen nach Prämien­summe .	131

Vorwort

Bereits im April 2007 habe ich bei der AXA Winterthur ein halbjähriges Praktikum antreten und auf diesem Weg einen Einblick in die Versicherungspraxis gewinnen können. Das Team des Nichtleben-Aktuariats um Alois Gisler herum hat mich herzlich aufgenommen und mich bei meinen Aufgaben stets unterstützt und gefördert.

Seit Oktober des vergangenen Jahres habe ich die vorliegende Diplomarbeit verfasst und mich parallel dazu weiterhin im Leben-Aktuarium engagiert. Im Pricing-Team Kollektiv-Leben - geleitet von Frank Weber - habe ich mich ebenfalls rasch wohl gefühlt und mich eifrig an die Entdeckung neuer Geschäftsbereiche gemacht. So hat sich inzwischen ergeben, dass ich im Rahmen einer Festanstellung weiterhin in Frank's Team tätig sein werde, und ich freue mich ausserordentlich auf diese Herausforderung und Chance.

Mein besonderer Dank für die Betreuung dieser Diplomarbeit gilt Alois Gisler und Frank Weber. Sowohl im theoretischen wie auch im praktischen Bereich sind sie mir stets hilfreich zur Seite gestanden und haben viele Ideen eingebracht. Doch auch dem übrigen Pricing-Team des Leben-Aktuariats danke ich für die Unterstützung, als spontan konkrete Fragen oder Probleme mit dem Programmcode aufgetaucht sind.

Das Verfassen dieser Arbeit hat mir viel Spass bereitet und sicherlich an der einen oder anderen Stelle ein tieferes Verständnis der zu Grunde liegenden Theorie vermittelt. Ich hoffe, dass mit diesem Werk ein nützlicher Beitrag geleistet werden konnte.

Manuel Tschupp
Februar 2008

Einleitung

Bühlmann und Straub haben durch ihre Arbeit [BS70] den Grundstein der modernen Credibility-Theorie gelegt. Diese ist ein Teilgebiet der Bayes'schen Statistik und betrachtet im Wesentlichen lineare Bayes-Schätzer auf Basis Bayes'scher Modelle. Insbesondere in Bereichen mit vergleichsweise wenig Daten hat sich die Credibility-Theorie als ein wertvolles Tarifierungs-Instrument erwiesen. Bis heute ist das Credibility-Modell von Bühlmann-Straub das in der Praxis am weitesten verbreitete und auch elementarere Bestandteil dieser Diplomarbeit.

Im Modell von Bühlmann-Straub wird die a priori-Kenntnis des Erwartungswerts des Credibility-Schätzers vorausgesetzt oder aber ein Kollektiv von Risiken zur Schätzung desselben. Es tritt in der Praxis jedoch auch die Situation auf, dass keines von beidem zur Verfügung steht. Dann könnte man aus einer anderen Informationsquelle eine Schätzung für den Mittelwert des Credibility-Schätzers beziehen, welche jedoch mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist. Wir betrachten ein Credibility-Modell, welches nebst der individuellen Beobachtung auf eine exogene Zufallsvariable abstützt, deren Erwartungswert dem Mittelwert des Credibility-Schätzers entspricht und deren Varianz abschätzbar ist.

Ein erstes Ziel im Rahmen des theoretischen Teils dieser Diplomarbeit ist die Herleitung eines Credibility-Schätzers für ein solches Modell mit exogener Information.

Der zweite Teil dieser Diplomarbeit ist von praktischer Natur. Eine Kollektiv-Lebensversicherung deckt mit ihren Versicherungsleistungen für die berufstätige Bevölkerung die Risiken Erleben, Invalidität und Tod ab. Zum Versichertenbestand eines typischen Versicherers zählen oftmals viele kleine zu tarifierende Kollektive. Weiter ist a priori bekannt, dass gewisse Branchen viele schlechte Risiken beinhalten, während Kollektive anderer Branchen systematisch wenige Schadenfälle verursachen. Und schliesslich unterliegt der typische Verlauf der Schadenbeobachtungen einigen gewichtigen Effekten wie beispielsweise der Spätschadenproblematik, die eine risikogerechte individuelle Tarifierung erschweren.

Ein zweites Ziel im Rahmen des praktischen Teils dieser Diplomarbeit ist die Anwendung bestehender Credibility-Modelle (namentlich Bühlmann-Straub und ein zeitinhomogenes Modell) auf die typische Situation eines Kollektiv-Lebensversicherers für das Risiko Invalidität. Das zeitinhomogene Modell wird aufgrund seines besonderen Aufbaus erfordern, neue Wege in der Schätzung der Strukturparameter zu gehen.

Die Diplomarbeit ist folgendermassen aufgebaut:

Im ersten Teil 'Grundlagen' stellen wir einige grundlegende Resultate der Credibility-Theorie vor, insbesondere das Modell und die zugehörigen Credibility-Schätzer von Bühlmann-Straub: Die in den Kapiteln 1 und 2 zusammengefassten Resultate werden für den theoretischen wie auch den praktischen Teil dieser Diplomarbeit benötigt.

Der zweite, theoretische Teil widmet sich dem Credibility Modell mit exogener Information und geht darüber hinaus auch auf theoretische Betrachtungen im Rahmen eines zeitinhomogenen Modells ein:

Kapitel 3 beschreibt ein Credibility-Modell mit exogener Information. Es werden ein homogener Credibility-Schätzer hergeleitet und seine Eigenschaften besprochen. Weiter stellen wir fest, dass das Modell von Bühlmann-Straub für ein einzelnes Risiko als Spezialfall aus unserem Modell mit exogener Information hervorgeht. Im Rahmen einer Konsistenzprüfung beweisen wir schliesslich, dass die Ableitung der exogenen Information aus einem Kollektiv von Risiken wiederum auf den klassischen Credibility-Schätzer von Bühlmann-Straub im Falle eines Kollektivs führt.

In Kapitel 4 erweitern wir das Modell aus Kapitel 3 auf ein Kollektiv von Risiken. Wir erhalten dadurch das um exogene Information ergänzte Modell von Bühlmann-Straub und präsentieren wiederum die resultierenden Credibility-Schätzer und ihre Eigenschaften. Wir zeigen die Kompatibilität zu Bühlmann-Straub wie auch zum vorhergehenden Modell für ein einzelnes Risiko.

Wir definieren in Kapitel 5 ein zeitinhomogenes Credibility-Modell, berechnen den resultierenden Credibility-Schätzer und nennen Eigenschaften. Erneut zeigt sich nach Restriktion eines freien Parameters die Kompatibilität dieses Modells zu Bühlmann-Straub. Weil die klassische Strukturparameterschätzung aufgrund des Modellaufbaus versagt, stellen wir eine alternative Methode zur Berechnung von Strukturparameterschätzern vor: Wir verwenden eine lineare Regression.

Im dritten, praktischen Teil beziehen wir uns auf die Situation eines Kollektiv-Lebensversicherers in der Praxis und führen risikogerechtes Pricing mit Hilfe von Credibility-Modellen durch:

Kapitel 6 legt den möglichen Aufbau eines risikogerechten Tarifierungs-Verfahrens im praktischen Alltag eines Kollektiv-Lebensversicherers fest. Wir beschränken uns hierbei auf das Risiko Invalidität und motivieren den Einsatz von Credibility zur risikogerechten Tarifierung. Darüber hinaus werden die auf den Bestand und die Beobachtungen wirkenden Effekte beschrieben und wie man diese ausgleichen kann.

In Kapitel 7 führen wir die auf einen realen Datenbestand angesetzten Credibility-Modelle zusammen mit einer jeweiligen Motivation auf und diskutieren die Resultate. Es wird ausserdem die Strukturparameterschätzung unter Zuhilfenahme einer Regression (aus Kapitel 5) mit Schätzern vorheriger Modelle verglichen.

Die systematisch auftretende 'doppelte Bestrafung und Belohnung' im Invalidenquoten- und Schadenraten-Modell aus Kapitel 7 wird in Kapitel 8 thematisiert. Die Hintergründe werden umschrieben, und eine mögliche Lösung wird vorgeschlagen. Schliesslich stellen wir die Resultate der korrigierten Credibility-Modelle vor.

Kapitel 9 befasst sich mit einer Risikoklassenzuteilung der Wirtschaftsbranchen auf Basis von Credibility-Modellen. Risikoklassen ermöglichen im Rahmen der Tarifierung auf Stufe des zu bewertenden Kollektivs eine Vorkonditionierung und sind ein wichtiges Instrument zur Diversifikation der Tarife, insbesondere wenn der individuelle Risikoverlauf des Kollektivs nicht bekannt ist.

Zusammenfassend halten wir Folgendes fest: In der vorliegenden Diplomarbeit wurde ein Credibility-Modell entwickelt, welches Information aus einer exogenen Zufallsvariable bezieht und das Modell von Bühlmann-Straub als Spezialfall enthält. Wir haben uns zweitens ein Bild darüber verschafft, wie Credibility in der Praxis für risikogerechtes Pricing im Kollektiv-Lebengeschäft für das Risiko Invalidität eingesetzt werden kann, wobei auftretenden Störeffekten Rechnung getragen wurde. Im Rahmen eines zeitinhomogenen Credibility-Modells wurde schliesslich ein alternatives Schätzverfahren zur Gewinnung der Strukturparameter mittels Regression vorgestellt, wenn klassische Methoden versagen. Wir hoffen, mit unseren Überlegungen und Resultaten einen Anstoss für weitere Entwicklungen gegeben zu haben.

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Credibility-Schätzer

Wir geben in diesem Kapitel eine kompakte Einführung in das Konzept der Credibility-Theorie und stellen ein grundlegendes Modell, den zugehörigen Credibility-Schätzer und einige Eigenschaften vor. Eine Auswahl wichtiger Resultate aus der Credibility-Theorie schliesst das Kapitel ab. Detailliertere Erläuterungen finden sich beispielsweise in [BG05].

Generell werden wir mit der Zufallsvariable Θ (beziehungsweise mit einer Realisation davon) die Risikocharakteristik eines zu bewertenden Risikos beschreiben. $\mu(\Theta)$ bezeichnet die entsprechende korrekte individuelle Prämie, welche wir mit einem Credibility-Modell schätzen möchten, und \underline{X} ist der Beobachtungsvektor des individuellen Schadenverlaufs, der für diese Schätzung zur Verfügung steht.

1.1 Definition und wichtige Resultate

Die Bayes-Prämie $\widetilde{\mu}(\Theta) := E[\mu(\Theta)|\underline{X}]$ mit $\underline{X}^T = (X_1, \dots, X_n)$ ist die bestmögliche Erfahrungsprämie hinsichtlich des quadratischen Verlusts in der Klasse aller Schätzfunktionen. Sie kann im Allgemeinen jedoch nicht in geschlossener analytischer Form angegeben werden und muss numerisch berechnet werden. Des Weiteren erfordert die Berechnung der Bayes-Prämie, dass man die a priori Verteilung und die bedingten Verteilungen kennt, auf welchen die Risikobewertung in der Bayes'schen Statistik basiert (zwei-Urnen-Modell, vgl. Seite 12 in [BG05]).

Aus diesen Gründen restringiert man die Klasse zulässiger Schätzer auf jene, die *linear* in den Beobachtungen \underline{X} sind, und betrachtet wiederum den im Bayes'schen Sinne besten Schätzer in der Klasse der linearen Schätzfunktionen hinsichtlich des quadratischen Verlusts. *Credibility-Schätzer* sind demnach *lineare Bayes-Schätzer*. Die Berechnung des Credibility-Schätzers erfordert lediglich die Kenntnis der ersten beiden (bedingten) Momente der zugrunde liegenden Verteilung.

Definition 1.1 (inhomogener und homogener Credibility-Schätzer)

i) Der (inhomogene) Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta)$ basierend auf $\underline{X}^T = (X_1, \dots, X_n)$ ist der bestmögliche Schätzer aus der Klasse

$$L(\underline{X}, 1) := \left\{ \widehat{\mu}(\Theta) : \widehat{\mu}(\Theta) = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j X_j, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

- ii) Der homogene Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta)$ basierend auf \underline{X} ist der bestmögliche Schätzer aus der Klasse der kollektiv biasfreien Schätzer

$$L_e(\underline{X}) := \left\{ \widehat{\mu(\Theta)} : \widehat{\mu(\Theta)} = \sum_{j=1}^n a_j X_j, \quad (a_j)_j \subset \mathbb{R}, \quad E[\widehat{\mu(\Theta)}] = E[\mu(\Theta)] \right\}.$$

Man kann Credibility-Schätzer auch als Orthogonalprojektionen im Hilbert-Raum \mathcal{L}^2 der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen verstehen. Diese Sichtweise der nachfolgenden Definition ist äquivalent zur Definition 1.1.

Definition 1.2 (Credibility-Schätzer als Projektion im Hilbert-Raum)

- i) Der (inhomogene) Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta)$ basierend auf \underline{X} ist gegeben durch

$$\widehat{\mu(\Theta)} = \text{Pro}(\mu(\Theta)|L(\underline{X}, 1)).$$

- ii) Der homogene Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta)$ basierend auf \underline{X} ist gegeben durch

$$\widehat{\mu(\Theta)}^{\text{hom}} = \text{Pro}(\mu(\Theta)|L_e(\underline{X})).$$

Für Herleitungen ist im Zusammenhang mit Projektionen oft das folgende Resultat sehr nützlich:

Theorem 1.3 (Iterativität von Projektionen) Seien M und M' abgeschlossene Unterräume (oder abgeschlossene affine Unterräume) von \mathcal{L}^2 mit $M \subset M'$. Dann gilt

$$\text{Pro}(Y|M) = \text{Pro}(\text{Pro}(Y|M')|M).$$

Für die so definierten Credibility-Schätzer gelten die folgenden Aussagen:

Theorem 1.4 (beste lineare Approximation)

- i) Die Credibility-Prämie $\widehat{\mu(\Theta)}$ ist die beste affin lineare Approximation zur Bayes-Prämie $\widetilde{\mu(\Theta)}$.

$$ii) \underbrace{E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta) \right)^2 \right]}_{\text{Totaler Fehler}} = \underbrace{E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta)} - \widetilde{\mu(\Theta)} \right)^2 \right]}_{\text{Approximations-Fehler}} + \underbrace{E \left[\left(\widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta) \right)^2 \right]}_{\text{Bayes-Risiko}}.$$

- iii) Die homogene Credibility-Prämie $\widehat{\mu(\Theta)}^{\text{hom}}$ ist die beste lineare Approximation zur Credibility-Prämie $\widehat{\mu(\Theta)}$ wie auch zur Bayes-Prämie $\widetilde{\mu(\Theta)}$.

Beweis. Seite 70 in [BG05]. □

In der Praxis sind die sogenannten Normalgleichungen zur Berechnung der Credibility-Schätzer gebräuchlicher:

Theorem 1.5 (Normalgleichungen des inhomogenen Schätzers)

$\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}$ ist genau dann der (inhomogene) Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta)$ basierend auf \underline{X} , falls die folgenden Normalgleichungen erfüllt sind:

i) $E \left[\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}} - \mu(\Theta) \right] = 0$

ii) $Cov(\mu(\Theta), X_j) = Cov \left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}, X_j \right), \quad j = 1, \dots, n.$

Beweis. Seite 72 in [BG05]. □

Theorem 1.6 (Normalgleichungen des homogenen Credibility-Schätzers)

$\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}}$ ist genau dann der homogene Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta)$ basierend auf \underline{X} , falls die folgenden Normalgleichungen erfüllt sind:

i) $E \left[\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta) \right] = 0$

ii) $Cov \left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta), \widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}} \right) = Cov \left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta), \widehat{\widehat{\mu(\Theta)}} \right),$
 $\forall \widehat{\widehat{\mu(\Theta)}} \in L_c(\underline{X}).$

1.2 Einfaches Bühlmann-Modell und intuitives Prinzip

Eines der grundlegendsten Credibility-Modelle für ein Kollektiv von Risiken ist das Einfache Bühlmann-Modell. Wir benutzen die Notation

X_{ij} Schadenvariable des Risikos i im Jahr j
 n Anzahl Jahre im Beobachtungszeitraum.

Modellannahmen 1.7 (Einfaches Bühlmann-Modell) Gegeben sei ein Portfolio ähnlicher Risiken $i = 1, \dots, I$ mit Beobachtungsvektoren $\underline{X}_i^T = (X_{i1}, \dots, X_{in})$ und Risikocharakteristika Θ_i . Weiter gelten:

i) Die Zufallsvariablen $X_{ij}, j = 1, \dots, n$, sind bedingt, gegeben $\Theta_i = \vartheta$, unabhängig und identisch F_ϑ -verteilt mit bedingten Momenten

$$\begin{aligned} \mu(\vartheta) &= E[X_{ij} | \Theta_i = \vartheta] \\ \sigma^2(\vartheta) &= Var(X_{ij} | \Theta_i = \vartheta). \end{aligned}$$

ii) Die Paare $(\Theta_1, \underline{X}_1), \dots, (\Theta_I, \underline{X}_I)$ sind unabhängig und identisch verteilt.

Die zugehörigen Strukturparameter sind

$$\begin{aligned} \mu_0 &= E[\mu(\Theta_i)] \\ \sigma^2 &= E[\sigma^2(\Theta_i)] \\ \tau^2 &= Var(\mu(\Theta_i)). \end{aligned}$$

Hierbei nennen wir σ^2 auch *innere Varianz* (Variabilität innerhalb eines Risikos) und τ^2 *äussere Varianz* (Variabilität zwischen den Risiken). Es ergeben sich die folgenden Credibility-Schätzer:

Theorem 1.8 (Credibility-Schätzer im einfachen Bühlmann-Modell) *Unter den Modellannahmen 1.7 lauten der inhomogene und der homogene Credibility-Schätzer*

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} &= \alpha \bar{X}_i + (1 - \alpha) \mu_0 \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} &= \alpha \bar{X}_i + (1 - \alpha) \bar{X},\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \\ \bar{X}_i &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij} \\ \bar{X} &= \frac{1}{I \cdot n} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n X_{ij}.\end{aligned}$$

Beweis. Seiten 61-63 in [BG05]. □

Man bemerke an dieser Stelle, dass der homogene Credibility-Schätzer mit \bar{X} einen Schätzer für den kollektiven Mittelwert μ_0 enthält. Anhand des einfachen Bühlmann-Modells lässt sich das Allgemeine Intuitive Prinzip illustrieren:

Proposition 1.9 (Allgemeines Intuitives Prinzip)

- $P^{\text{coll}} = \mu_0$ ist der beste Schätzer für $\mu(\Theta_i)$ basierend auf der a priori Kenntnis allein. Er hat quadratischen Verlust

$$E \left[(\mu_0 - \mu(\Theta_i))^2 \right] = \text{Var}(\mu(\Theta_i)) = \tau^2.$$

- \bar{X}_i ist der bestmögliche lineare und individuell biasfreie (bedingt, gegeben Θ_i) Schätzer für $\mu(\Theta_i)$ basierend auf dem individuellen Beobachtungsvektor \underline{X}_i allein. Er hat quadratischen Verlust

$$E \left[(\bar{X}_i - \mu(\Theta_i))^2 \right] = E \left[\frac{\sigma^2(\Theta_i)}{n} \right] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

- $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ ist gewichtetes Mittel aus P^{coll} und \bar{X}_i , wobei die Gewichte proportional zur jeweiligen Präzision sind (dem inversen quadratischen Verlust), d.h.

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} &= \alpha \bar{X}_i + (1 - \alpha) \mu_0, \\ \text{wobei } \alpha &= \frac{\frac{n}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \frac{\sigma^2}{n}} = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}.\end{aligned}$$

Bemerkung 1.10 *Folgende Betrachtungen sind intuitiv nachvollziehbar:*

- *Der Quotient $\kappa = \frac{\sigma^2}{\tau^2}$ heisst Credibility-Koeffizient und kann auch geschrieben werden als $\kappa = \left(\frac{\sigma}{\mu_0}\right)^2 \left(\frac{\tau}{\mu_0}\right)^{-2}$. Hierbei ist $\frac{\tau}{\mu_0}$ der Variationskoeffizient von $\mu(\Theta_i)$ und ein gutes Mass für die Heterogenität des Portfolios. Hingegen ist $\frac{\sigma}{\mu_0} = \frac{\sqrt{E[\text{Var}(X_{ij}|\Theta_i)]}}{E[X_{ij}]}$ die erwartete Standardabweichung innerhalb des Risikos dividiert durch den Erwartungswert des Risikos, was ein gutes Mass für die innere Risiko-Variabilität darstellt.*
- *Das Credibility-Gewicht α erhöht sich, falls*
 - *die Anzahl Beobachtungsjahre n ansteigt,*
 - *die Heterogenität des Portfolios (gemessen durch $\frac{\tau}{\mu_0}$) steigt,*
 - *die innere Risiko-Variabilität (gemessen durch $\frac{\sigma}{\mu_0}$) sinkt.*

Kapitel 2

Modell von Bühlmann-Straub

Wir führen in die Notation, Schätzer und Eigenschaften ein, auf welche wir später in dieser Arbeit verweisen werden.

2.1 Formales Modell und Credibility-Schätzer

Wir betrachten ein Portfolio von I Risiken und benutzen die Notationen

X_{ij}	Schadenvariable des Risikos i im Jahr j , z.B. Schadendurchschnitt oder -frequenz.
w_{ij}	zu X_{ij} gehöriges Volumenmass, z.B. Anzahl Jahresrisiken oder Schäden.

Modellannahmen 2.1 (Modell von Bühlmann-Straub) *Das zu bewertende Risiko i sei charakterisiert durch sein Risikoprofil ϑ_i , welches Realisation einer Zufallsvariable Θ_i ist. Gegeben sei weiter ein Beobachtungsvektor $\underline{X}_i^T = (X_{i1}, \dots, X_{in})$, $n \in \mathbb{N}$, und es gelten:*

i) Bedingt, gegeben Θ_i , sind $\{X_{ij} : j = 1, \dots, n\}$ unabhängig mit

$$\begin{aligned} E[X_{ij}|\Theta_i] &= \mu(\Theta_i) \\ \text{Var}(X_{ij}|\Theta_i) &= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{ij}}. \end{aligned}$$

ii) Die Paare $(\Theta_1, \underline{X}_1), \dots, (\Theta_I, \underline{X}_I)$ sind unabhängig, und $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ sind unabhängig und identisch verteilt.

Für die Strukturparameter gilt $E[\mu(\Theta_i)] = \mu_0 = E[X_{ij}]$, $\sigma^2 = E[\sigma^2(\Theta_i)]$ und $\tau^2 = \text{Var}(\mu(\Theta_i))$. Weiter ergeben sich die folgenden Credibility-Schätzer:

Theorem 2.2 (inhomogener Credibility-Schätzer in Bühlmann-Straub)

Unter den Modellannahmen 2.1 ist der (inhomogene) Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta_i)$ gegeben durch

$$\widehat{\mu(\Theta_i)} = \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \mu_0,$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } X_i &= \sum_{j=1}^n \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} X_{ij} \\ \alpha_i &= \frac{w_{i\bullet}}{w_{i\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} = \frac{w_{i\bullet}}{w_{i\bullet} + \kappa}. \end{aligned}$$

Beweis. Seite 81-83 in [BG05]. □

Wir haben eine Summations-Notation benutzt, in welcher ein Punkt (\bullet) die Summation über den entsprechenden Parameter an dieser Stelle bedeutet, also beispielsweise

$$w_{i\bullet} = \sum_{j=1}^n w_{ij}.$$

Der homogene Credibility-Schätzer resultiert wie folgt:

Theorem 2.3 (homogener Credibility-Schätzer in Bühlmann-Straub)
Unter den Modellannahmen 2.1 ist der homogene Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta_i)$ gegeben durch

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} = \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \widehat{\widehat{\mu_0}},$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } X_i &= \sum_{j=1}^n \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} X_{ij} \\ \widehat{\widehat{\mu_0}} &= \sum_{i=1}^I \frac{\alpha_i}{\alpha_{\bullet}} X_i \\ \alpha_i &= \frac{w_{i\bullet}}{w_{i\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}. \end{aligned}$$

Für die soeben aufgeführten Schätzer ergeben sich die folgenden quadratischen Verluste:

Proposition 2.4 (quadratischer Verlust des inhomogenen Bühlmann-Straub-Schätzers) *Der quadratische Verlust des Credibility-Schätzers $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ aus Theorem 2.2 ist gegeben durch*

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \tau^2 (1 - \alpha_i) = \alpha_i \frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}}.$$

Proposition 2.5 (quadratischer Verlust des homogenen Bühlmann-Straub-Schätzers) *Der quadratische Verlust des Credibility-Schätzers $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}}$ aus Theorem 2.3 ist gegeben durch*

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \tau^2 (1 - \alpha_i) \left(1 + \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_{\bullet}} \right).$$

Beweis. Seite 92 in [BG05]. \square

Der homogene Credibility-Schätzer von Bühlmann-Straub erfüllt zudem die Balance-Eigenschaft, d.h. über das gesamte Portfolio gesehen würde mittels der homogenen Credibility-Prämie exakt eingenommen, was an summiertem Schadenbetrag anfällt:

Proposition 2.6 (Balance-Eigenschaft des homogenen Bühlmann-Straub-Schätzers) *Unter den Modellannahmen 2.1 gilt für den homogenen Bühlmann-Straub-Schätzer*

$$\sum_{i,j} w_{ij} \widehat{\widehat{\mu}}(\Theta_i)^{\text{hom}} = \sum_{i,j} w_{ij} X_{ij}.$$

Beweis. Seite 91 in [BG05]. \square

2.2 Schätzung der Strukturparameter

Die im Modell und für den Schätzer notwendigen Strukturparameter können entweder nach der reinen Bayes'schen Methode durch einen Experten gewählt oder aber aus dem Bestand geschätzt werden (empirisch Bayes'sch). Wir führen die entsprechenden Schätzer hier auf.

Für die innere Varianz erhalten wir

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n w_{ij} (X_{ij} - X_i)^2,$$

während die äussere Varianz sich durch

$$\begin{aligned} \widehat{\tau^2} &= \max \left\{ \widehat{\tau^2}, 0 \right\}, \\ \widehat{\tau^2} &= c \cdot \left\{ \frac{I}{I-1} \sum_{i=1}^I \frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} (X_{ij} - \bar{X})^2 - \frac{I \cdot \widehat{\sigma^2}}{w_{\bullet\bullet}} \right\} \\ c &= \frac{I-1}{I} \left\{ \sum_{i=1}^I \frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \left(1 - \frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \right) \right\}^{-1}, \quad c \begin{cases} = 1, & w_{i\bullet} = \text{const} \forall i \\ > 1, & \text{sonst} \end{cases} \\ \bar{X} &= \sum_{i=1}^I \frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} X_i \end{aligned}$$

abschätzen lässt.

Weiter sind $\widehat{\sigma^2}$ und $\widehat{\tau^2}$ biasfrei, d.h. $E[\widehat{\sigma^2}] = \sigma^2$ und $E[\widehat{\tau^2}] = \tau^2$, und konsistent ($\widehat{\sigma^2} \rightarrow \sigma^2$ und $\widehat{\tau^2} \rightarrow \tau^2$ in Wahrscheinlichkeit für $I \rightarrow \infty$ nach Chebyshev). $\widehat{\tau^2}$ wird möglicherweise negativ, weshalb wir den nicht mehr biasfreien Schätzer $\widehat{\tau^2}$ verwenden. Ein verschwindender Schätzer für die äussere Varianz bedeutet hierbei, dass es keine messbare Differenz zwischen den Risiken gibt.

2.3 Bekannte a priori-Unterschiede

Die Annahme in Bühlmann-Straub, dass die Risiken einer Risikoklasse 'a priori gleich' sind (vgl. *ii*) in den Modellannahmen 2.1), ist eine starke Forderung und in der Versicherungspraxis in vielen Situationen nicht erfüllt. Oftmals ist Information über 'a priori Unterschiede' zwischen den individuellen Risiken vorhanden, beispielsweise durch die aktuelle Prämie.

Durch eine geringfügige Modifikation der Modellannahmenerhöhen wir die Anwendbarkeit des Modells von Bühlmann-Straub in der Praxis enorm:

Modellannahmen 2.7 (Bühlmann-Straub mit a priori-Differenzierung)

Das zu bewertende Risiko i sei charakterisiert durch sein Risikoprofil ϑ_i , welches Realisation einer Zufallsvariable Θ_i ist. Gegeben sei weiter ein Beobachtungsvektor $\underline{X}_i^T = (X_{i1}, \dots, X_{in})$, $n \in \mathbb{N}$, und es gelten:

i) Bedingt, gegeben Θ_i , sind $\{X_{ij} : j = 1, \dots, n\}$ unabhängig mit

$$\begin{aligned} E[X_{ij}|\Theta_i] &= d_i \cdot \mu(\Theta_i) \\ \text{Var}(X_{ij}|\Theta_i) &= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\left(\frac{w_{ij}}{d_i}\right)}, \end{aligned}$$

wobei d_i , $i = 1, \dots, I$, bekannte Konstanten sind.

ii) Die Paare $(\Theta_1, \underline{X}_1), \dots, (\Theta_I, \underline{X}_I)$ sind unabhängig, und $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ sind unabhängig und identisch verteilt.

Für die transformierten Zufallsvariablen $Y_{ij} = \frac{X_{ij}}{d_i}$ mit den transformierten Gewichten $w_{ij}^* = d_i w_{ij}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} E[Y_{ij}|\Theta_i] &= \mu(\Theta_i) \\ \text{Var}(Y_{ij}|\Theta_i) &= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{ij}^*} \end{aligned}$$

und somit das reguläre Bühlmann-Straub-Modell mit

$$\widehat{\widehat{\mu}}_X(\Theta_i) = d_i \cdot \widehat{\widehat{\mu}}(\Theta_i) = \alpha_i^* X_i + (1 - \alpha_i^*) \mu_i,$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } \mu_i &= d_i \cdot \mu_0 \\ \alpha_i^* &= \frac{d_i w_{i\bullet}}{d_i w_{i\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}. \end{aligned}$$

Teil II

Theoretischer Teil

Kapitel 3

Credibility mit exogener Information

In diesem Kapitel führen wir ein Credibility-Modell ein, welches zur Bewertung eines Risikos nebst der individuellen Risikobeobachtung auf exogene und mit Unsicherheit behaftete Information in Form einer Zufallsvariable zurückgreift. Im Wesentlichen handelt es sich dabei um das bekannte Modell von Bühlmann-Straub für ein einzelnes Risiko - an Stelle des unbekanntes konstanten Erwartungswerts μ_0 steht nun aber der variable exogene Schätzer.

Nach einigen Ausführungen zur Motivation dieses Ansatzes leiten wir den entsprechenden (homogenen) Credibility-Schätzer her (Theorem 3.2) und präsentieren einige Eigenschaften wie auch die Kompatibilität zum inhomogenen Bühlmann-Straub-Schätzer für ein einzelnes Risiko. Schliesslich zeigen wir auf, wie man die exogene Zufallsvariable aus einem Risikokollektiv ableiten kann und beweisen, dass daraus der homogene Credibility-Schätzer von Bühlmann-Straub im Falle eines Kollektivs von Risiken resultiert.

3.1 Motivation

Das Credibility-Modell von Bühlmann-Straub (vgl. Kapitel 2.1) setzt die Kenntnis der kollektiven Erwartung μ_0 voraus (im inhomogenen Credibility-Schätzer) oder bedarf der Beobachtung eines Kollektivs, um selbige zu schätzen (im homogenen Credibility-Schätzer).

In der Praxis verfügt man jedoch manchmal weder über den Erwartungswert μ_0 des zu bewertenden Risikos, noch über ein Kollektiv ähnlicher Risiken - einzig die *individuelle* Beobachtung des betrachteten Risikos über einen gewissen Zeitraum hinweg steht zur Verfügung. Stattdessen gibt über das zu tarifierende Risiko eine beliebige externe Informationsquelle Auskunft, welche aber selbst mit einer bekannten oder abschätzbaren Unsicherheit behaftet ist. Solcherlei exogene Information kann man modellieren als Zufallsvariable Z mit Momenten $E[Z] = \mu_0$ und $Var(Z) = \zeta^2$. Im Rahmen eines Credibility-Modells stellt sich dann die Frage nach der Gewichtung zwischen der individuellen Beobachtung des betrachteten Risikos und dieser exogenen Information Z .

Ein derartiges Credibility-Modell findet nicht nur in der Versicherungspraxis vielerlei Anwendungsmöglichkeiten. Beispielsweise soll ein Wertpapier qualifi-

ziert werden, wobei der Markt Information mit begrenzter Aussagekraft beisteuert. Oder ein Aktuar legt aufgrund langjähriger Erfahrungswerte den ungefähren (kollektiven) Erwartungswert fest und schätzt die Unsicherheit dieser Aussage ab. Entscheidender Vorteil dieses Modells ist, dass nebst der Beobachtung des *einzelnen* zu bewertenden Risikos lediglich eine *ungewisse Information von beliebiger externer Quelle* benötigt wird, die sich als Zufallsvariable modellieren lässt.

3.2 Formales Modell für ein einzelnes Risiko

Wir führen zunächst die Modellannahmen auf und leiten dann den Credibility-Schätzer her.

Modellannahmen 3.1 (exogene Information zum einzelnen Risiko) *Das zu bewertende Risiko sei charakterisiert durch sein Risikoprofil ϑ , welches Realisation einer Zufallsvariable Θ ist. Gegeben sei weiter ein Beobachtungsvektor $\underline{X}^T = (X_1, \dots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, und es gelten:*

i) *Bedingt, gegeben Θ , sind $\{X_j : j = 1, \dots, n\}$ unabhängig mit*

$$\begin{aligned} E[X_j|\Theta] &= \mu(\Theta) \\ \text{Var}(X_j|\Theta) &= \frac{\sigma^2(\Theta)}{w_j}. \end{aligned}$$

ii) *Weiter sei gegeben eine Zufallsvariable Z (exogener Schätzer für μ_0) unabhängig von Θ und \underline{X} mit*

$$\begin{aligned} E[Z] &= \mu_0 \\ \text{Var}(Z) &= \zeta^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Strukturparameter unmittelbar $E[\mu(\Theta)] = \mu_0 = E[X_j]$, $\sigma^2 = E[\sigma^2(\Theta)]$ und $\tau^2 = \text{Var}(\mu(\Theta))$.

Theorem 3.2 (homogener Credibility-Schätzer) *Unter den Modellannahmen 3.1 ist der homogene Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta)$ gegeben durch*

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}} = \gamma \bar{X} + (1 - \gamma)Z = Z + \gamma(\bar{X} - Z),$$

$$\begin{aligned} \text{wobei} \quad \bar{X} &= \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{w_{\bullet}} X_j \\ \gamma &= \frac{w_{\bullet}}{w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2 + \zeta^2}}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir minimieren den quadratischen Verlust von $\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}}$ hinsichtlich $\mu(\Theta)$ (korrekte individuelle Prämie):

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta) \right)^2 \right] = \min_{c \in \mathbb{R}} E \left[\left(Z + c(\bar{X} - Z) - \mu(\Theta) \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dc} E \left[(Z + c(\bar{X} - Z) - \mu(\Theta))^2 \right] \\
&= 2E \left[(\bar{X} - Z) (c\bar{X} + (1-c)Z - \mu(\Theta)) \right] \\
&= 2E \left[((\bar{X} - \mu_0) - (Z - \mu_0)) (c(\bar{X} - \mu_0) \right. \\
&\quad \left. + (1-c)(Z - \mu_0) - (\mu(\Theta) - \mu_0)) \right] \tag{3.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left\{ c \text{Var}(\bar{X}) - c \text{Cov}(Z, \bar{X}) + (1-c) \text{Cov}(\bar{X}, Z) - (1-c) \text{Var}(Z) \right. \\
&\quad \left. - \text{Cov}(\bar{X}, \mu(\Theta)) + \text{Cov}(Z, \mu(\Theta)) \right\} \\
&= 2 \left\{ c \left(\frac{\sigma^2}{w_\bullet} + \tau^2 \right) - 0 + 0 - (1-c)\zeta^2 - \tau^2 + 0 \right\} \tag{3.2} \\
&= 2 \left\{ c \left(\frac{\sigma^2}{w_\bullet} + \tau^2 + \zeta^2 \right) - (\zeta^2 + \tau^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{\tau^2 + \zeta^2}{\tau^2 + \zeta^2 + \frac{\sigma^2}{w_\bullet}} = \frac{w_\bullet}{w_\bullet + \frac{\sigma^2}{\tau^2 + \zeta^2}},$$

wobei wir (3.1) verwendet haben, dass

$$\begin{aligned}
E[\mu(\Theta)] &= E[E[X_j|\Theta]] = E[X_j] = \mu_0 \tag{3.3} \\
E[\bar{X}] &= \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{w_\bullet} E[X_j] = \frac{w_\bullet}{w_\bullet} \mu_0 = \mu_0 \\
E[Z] &= \mu_0,
\end{aligned}$$

sowie in (3.2) die Unabhängigkeit von Z und

$$\text{Cov}(\bar{X}, \mu(\Theta)) = \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{w_\bullet} \text{Cov}(X_j, \mu(\Theta)) \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{w_\bullet} \underbrace{E[\text{Cov}(X_j, \mu(\Theta)|\Theta)]}_{=0} \\
&\quad + \text{Cov} \left(\underbrace{E[X_j|\Theta]}_{=\mu(\Theta)}, \underbrace{E[\mu(\Theta)|\Theta]}_{=E[E[X_j|\Theta]|\Theta]=\mu(\Theta)} \right) \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$= \frac{w_\bullet}{w_\bullet} \text{Var}(\mu(\Theta)) = \tau^2$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = E[\text{Var}(\bar{X}|\Theta)] + \text{Var}(E[\bar{X}|\Theta]) \tag{3.6}$$

$$= E \left[\sum_{j=1}^n \frac{w_j^2}{w_\bullet^2} \text{Var}(X_j|\Theta) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \frac{w_j w_k}{w_\bullet^2} \underbrace{\text{Cov}(X_j, X_k|\Theta)}_{=0} \right]$$

$$+ \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n \frac{w_j}{w_\bullet} E[X_j|\Theta] \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{w_j^2}{w_\bullet^2} E \left[\frac{\sigma^2(\Theta)}{w_j} \right] + \text{Var} \left(\frac{w_\bullet}{w_\bullet} \mu(\Theta) \right)$$

$$= \frac{w_\bullet}{w_\bullet^2} \sigma^2 + \tau^2 = \frac{\sigma^2}{w_\bullet} + \tau^2,$$

des Weiteren in (3.5) die bedingte Unabhängigkeit von $(X_j)_j$ (welche bedingte Unkorreliertheit impliziert). Der Nachweis des globalen Minimums in \mathbb{R} erfolgt über

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dc^2} E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta) \right)^2 \right] &= \frac{d}{dc} 2E [(\bar{X} - Z)(Z + c(\bar{X} - Z) - \mu(\Theta))] = \\ &= \frac{d}{dc} 2E [c(\bar{X} - Z)^2] = 2E [(\bar{X} - Z)^2] > 0. \end{aligned}$$

□

An dieser Stelle halten wir fest, dass man das Credibility-Gewicht γ unter den Modellannahmen 3.1 auch mittels des Allgemeinen Intuitiven Prinzips (vgl. Proposition 1.9 auf Seite 6) erhalten kann:

Proposition 3.3 (Allgemeines Intuitives Prinzip) *Unter Modellannahmen 3.1 ist das Allgemeine Intuitive Prinzip anwendbar, d.h. der Credibility-Schätzer ist gewichtetes Mittel aus \bar{X} und Z mit Gewichten umgekehrt proportional zu den Präzisionen von \bar{X} und Z hinsichtlich quadratischen Verlusts zu $\mu(\Theta)$.*

Beweis. Wir berechnen zunächst die quadratischen Verluste von \bar{X} und Z in Bezug auf $\mu(\Theta)$, welche reziprok zur jeweiligen Präzision sind:

$$\begin{aligned} E [(\bar{X} - \mu(\Theta))^2] &= E [((\bar{X} - \mu_0) - (\mu(\Theta) - \mu_0))^2] \\ &= \text{Var}(\bar{X}) - 2\text{Cov}(\bar{X}, \mu(\Theta)) + \text{Var}(\mu(\Theta)) \\ &= \frac{\sigma^2}{w_\bullet} + \tau^2 - 2\tau^2 + \tau^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{w_\bullet} =: \frac{1}{\varrho_{\bar{X}}} \\ E [(Z - \mu(\Theta))^2] &= E [((Z - \mu_0) - (\mu(\Theta) - \mu_0))^2] \\ &= \text{Var}(Z) - 2\text{Cov}(Z, \mu(\Theta)) + \text{Var}(\mu(\Theta)) \\ &= \zeta^2 + \tau^2 =: \frac{1}{\varrho_Z} \end{aligned}$$

wobei $\text{Cov}(\bar{X}, \mu(\Theta)) = \tau^2$ in (3.4) berechnet wurde und $\text{Cov}(Z, \mu(\Theta)) = 0$ wegen der Unabhängigkeit von Z . Somit erhalten wir für das Credibility-Gewicht $\tilde{\gamma}$ vor \bar{X} im Credibility-Schätzer

$$\tilde{\gamma} = \frac{\varrho_{\bar{X}}}{\varrho_{\bar{X}} + \varrho_Z} = \frac{w_\bullet}{w_\bullet + \frac{\sigma^2}{\tau^2 + \zeta^2}} = \gamma,$$

was dem Credibility-Gewicht in Theorem 3.2 entspricht. □

3.3 Eigenschaften des Credibility-Schätzers

Im Folgenden betrachten wir einige Eigenschaften des in Theorem 3.2 hergeleiteten homogenen Credibility-Schätzers. Von Interesse sind beispielsweise das Verhalten des Schätzers in Abhängigkeit der Strukturparameter und der quadratische Verlust.

Als unmittelbare Konsequenz aus Theorem 3.2 folgt für die Strukturparameter und das Credibility-Gewicht

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] = E[w_j \text{Var}(X_j|\Theta)] \\ \tau^2 &= \text{Var}(\mu(\Theta)) \\ \zeta^2 &= \text{Var}(Z) \\ \gamma &= \frac{w_\bullet}{w_\bullet + \frac{\sigma^2}{\tau^2 + \zeta^2}},\end{aligned}$$

dass

$$\begin{aligned}\gamma &\longrightarrow 0, \text{ falls } \begin{array}{l} \sigma^2 \longrightarrow \infty \quad \text{oder} \\ \tau^2 + \zeta^2 \longrightarrow 0 \end{array} \\ \gamma &\longrightarrow 1, \text{ falls } \begin{array}{l} \sigma^2 \longrightarrow 0 \quad \text{oder} \\ \tau^2 \longrightarrow \infty \quad \text{oder} \\ \zeta^2 \longrightarrow \infty. \end{array}\end{aligned}$$

Bemerkung 3.4 *Obiges Verhalten hat die folgende Bedeutung:*

- Ein Credibility-Gewicht γ von Null bedeutet, dass der Credibility-Schätzer vollständig auf dem Wert der exogenen Information Z basiert, ohne die individuelle Beobachtung zu berücksichtigen. Das Gewicht 1 bewirkt hingegen, dass ausschliesslich die individuelle Risikoerfahrung Einfluss nimmt.
- Das Credibility-Gewicht verschwindet, falls die Risiko-interne Variabilität (die Schwankung innerhalb des Beobachtungsvektors) gegen Unendlich strebt, was die statistische Verlässlichkeit eines festen Niveaus abgeleitet aus der individuellen Beobachtung vernichtet. Gamma strebt ebenfalls gegen Null, falls die Risiko-externen Unsicherheiten (die Schwankungen zwischen verschiedenen Risiko-Betrachtungen, sowie jene der exogenen Zufallsvariable Z) beide verschwinden, d.h. die Risikocharakteristik und Z sind a priori determiniert und zuverlässig.
- Die individuellen Beobachtungen gewinnen volle prognostische Aussagekraft, wenn sie keiner Schwankung unterliegen oder wenn eine der externen Variabilitäten ins Unendliche steigt.

Als nächstes Betrachten wir den quadratischen Verlust des homogenen Credibility-Schätzers im Modell mit exogener Information:

Proposition 3.5 (Quadratischer Verlust bei exogener Information) *Der quadratische Verlust des Credibility-Schätzers $\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}}$ aus Theorem 3.2 ist gegeben durch*

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta) \right)^2 \right] = (\tau^2 + \zeta^2)(1 - \gamma).$$

Beweis. In Theorem 3.2 wurde für $\widehat{\mu(\Theta)}^{\text{hom}}$ das Credibility-Gewicht

$$\gamma = \frac{w_{\bullet}}{w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2 + \zeta^2}}$$

hergeleitet. Dieses eingebracht (im zweitletzten Schritt) führt auf folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta)}^{\text{hom}} - \mu(\Theta) \right)^2 \right] &= E \left[(\gamma \bar{X} + (1 - \gamma)Z - \mu(\Theta))^2 \right] \\ &= E \left[(\gamma(\bar{X} - \mu_0) + (1 - \gamma)(Z - \mu_0) - (\mu(\Theta) - \mu_0))^2 \right] \\ &= \gamma^2 \text{Var}(\bar{X}) + (1 - \gamma)^2 \text{Var}(Z) + \text{Var}(\mu(\Theta)) \\ &\quad + 2\gamma(1 - \gamma) \text{Cov}(\bar{X}, Z) - 2\gamma \text{Cov}(\bar{X}, \mu(\Theta)) \\ &\quad - 2(1 - \gamma) \text{Cov}(Z, \mu(\Theta)) \\ &= \gamma^2 \left(\frac{\sigma^2}{w_{\bullet}} + \tau^2 \right) + (1 - \gamma)^2 \zeta^2 + \tau^2 - 2\gamma\tau^2 \\ &= \gamma^2 \left(\frac{\sigma^2}{w_{\bullet}} + \tau^2 + \zeta^2 \right) + (1 - 2\gamma)(\tau^2 + \zeta^2) \\ &= \gamma^2 (\tau^2 + \zeta^2) \frac{1}{\gamma} - \gamma(\tau^2 + \zeta^2) + (1 - \gamma)(\tau^2 + \zeta^2) \\ &= (1 - \gamma)(\tau^2 + \zeta^2). \end{aligned}$$

□

3.4 Bühlmann-Straub als Spezialfall

In einem ersten Abschnitt beweisen wir, dass unter gegebenen Umständen für ein einzelnes betrachtetes Risiko aus unserem Credibility-Schätzer mit exogener Information der (inhomogene) Bühlmann-Straub-Schätzer folgt. Der zweite Abschnitt betrachtet ein zusätzliches Fremdkollektiv von Risiken, welches zur Festlegung der exogenen Zufallsvariable Z benutzt wird. Aus unserem Credibility-Schätzer resultiert dann der homogene Schätzer von Bühlmann-Straub im Falle eines Risikokollektivs.

3.4.1 Der inhomogene Bühlmann-Straub-Schätzer

Wie in Kapitel 2.1 aufgeführt, lautet der inhomogene Credibility-Schätzer im Modell von Bühlmann-Straub (siehe Modellannahmen 2.1 auf Seite 9) restringiert auf ein einzelnes betrachtetes Risiko

$$\begin{aligned} \widehat{\mu(\Theta)}^{\text{BS}} &= \alpha \bar{X} + (1 - \alpha)\mu_0 \\ \text{wobei } \bar{X} &= \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{w_{\bullet}} X_j \\ \alpha &= \frac{w_{\bullet}}{w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \end{aligned}$$

Unsere Modellannahmen 3.1 und der in Theorem 3.2 hergeleitete Credibility-Schätzer entsprechen dem inhomogenen Fall von Bühlmann-Straub, falls die Zufallsvariable Z in ihren konstanten Erwartungswert μ_0 übergeht, was für $\text{Var}(Z) = \zeta^2 \rightarrow 0$ gegeben ist ($\implies Z \rightarrow \mu_0$).

Proposition 3.6 (Kompatibilität zu Bühlmann-Straub) *Im Falle eines einzelnen Risikos ist der inhomogene Bühlmann-Straub-Schätzer ein Spezialfall des in Theorem 3.2 hergeleiteten Schätzers mit exogener Information.*

Beweis. Es wurde bereits festgehalten, dass

$$Z \rightarrow E[Z] = \mu_0, \quad \text{falls } \text{Var}(Z) = \zeta^2 \rightarrow 0.$$

Wir betrachten weiter das Credibility-Gewicht

$$\gamma = \frac{w_\bullet}{w_\bullet + \frac{\sigma^2}{\tau^2 + \zeta^2}} \rightarrow \frac{w_\bullet}{w_\bullet + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} = \alpha, \quad \text{falls } \zeta^2 \rightarrow 0,$$

und somit folgt für den Credibility-Schätzer

$$\widehat{\mu(\Theta)}^{\text{hom}} = \gamma \bar{X} + (1 - \gamma)Z \rightarrow \alpha \bar{X} + (1 - \alpha)\mu_0 = \widehat{\mu(\Theta)}^{\text{BS}}, \quad \text{falls } \zeta^2 \rightarrow 0.$$

□

Korollar 3.7 *Konsequenterweise geht auch der quadratische Verlust von $\widehat{\mu(\Theta)}^{\text{hom}}$ in jenen von $\widehat{\mu(\Theta)}^{\text{BS}}$ über (vgl. Proposition 2.5 auf Seite 10):*

$$(\tau^2 + \zeta^2)(1 - \gamma) \rightarrow \tau^2(1 - \alpha), \quad \text{falls } \zeta^2 \rightarrow 0,$$

d.h.

$$E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta)}^{\text{hom}} - \mu(\Theta) \right)^2 \right] \rightarrow E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta)}^{\text{BS}} - \mu(\Theta) \right)^2 \right], \quad \text{falls } \zeta^2 \rightarrow 0.$$

3.4.2 Der homogene Bühlmann-Straub-Schätzer

Wir betrachten die folgende Situation unter den Modellannahmen 2.1 von Bühlmann-Straub auf Seite 9:

Ein Kollektiv mit Risiken $i = 1, \dots, I$ sei partitioniert in ein *einzelnes, betrachtetes Risiko* (mit Nummer I , z.B. die eigene Gesellschaft) und *exogene Information* (übrige Risiken $1, \dots, I - 1$, z.B. fremde Gesellschaften). Wir beabsichtigen, das betrachtete Risiko I zu bewerten, wobei aus unserer Sicht lediglich die eigene Risikoerfahrung zur Verfügung steht (ohne Kenntnis eines kollektiven Mittels μ_0) sowie ein exogener Schätzer Z , der sich aus der Risikoerfahrung des Fremdkollektivs mit Risiken $1, \dots, I - 1$ ableitet. Zur Bewertung verwenden wir den homogenen Credibility-Schätzer aus Theorem 3.2 auf Seite 16. Es ist zu erwarten, dass der resultierende Credibility-Schätzer dem homogenen Credibility-Schätzer von Bühlmann-Straub entspricht.

Die Ausgangslage ist hier jedoch eine *andere*, erfordert doch der Einsatz von Bühlmann-Straub die Kenntnis der Risikoerfahrung des Kollektivs höchst selbst. Unser Ansatz lässt in der Praxis zu, dass die notwendige kollektive Information durch eine Fremdinstanz in Form einer komprimierten Information, einer Zufallsvariablen Z , gegeben wird. In einer konkreten Anwendung verfügt z.B. eine kleine Gesellschaft über einen zu eingeschränkten eigenen Bestand, um daraus die Modellparameter mit ausreichender Zuverlässigkeit zu schätzen. Andere, grössere Gesellschaften möchten aber aus Datenschutz- oder Konkurrenzgründen die ausführlichen Risikobeobachtungen ihres Bestands nicht preisgeben - durch die komprimierte Information Z kann die nötige Information aber dennoch solidarisch verteilt werden, ohne redundante Information über die eigene Bestandsstruktur zu verteilen.

Auch wenn wir nachfolgend ein *einziges Risiko* einem externen Risikokollektiv gegenüber stellen, so lassen sich der Ansatz und sämtliche Resultate auf ein bekanntes, internes *Kollektiv* (z.B. schliessen sich einige kleine Gesellschaften zusammen) mit exogener Information aus einem Fremdkollektiv erweitern. Der hierzu nötige Credibility-Schätzer wird im nächsten Kapitel 4 behandelt.

Exogene Information aus einem Fremdkollektiv

Nachfolgend führen wir zur sauberen Darlegung des Problems eine neue Notation ein:

Notation 3.8 (internes Risiko, externes Kollektiv)

<i>internes Risiko</i> I	<i>externe Risiken</i> $i = 1, \dots, I - 1$
<i>Risikocharakteristik</i> Θ	<i>Risikocharakteristika</i> Ξ_i
<i>Beobachtungsvektor</i> $\underline{X}^T = (X_1, \dots, X_n)$	<i>Beobachtungsvektoren</i> $\underline{Y}_i^T = (Y_{i1}, \dots, Y_{in})$
<i>Gewichte</i> $w_j, j = 1, \dots, n$	$\nu_{ij}, j = 1, \dots, n$
$\sigma^2 = E[\sigma^2(\Theta)]$	$\sigma^2 = E[\sigma^2(\Xi_i)] = E[\sigma^2(\Theta)]$
$\tau^2 = Var(\mu(\Theta))$	$\tau^2 = Var(\mu(\Xi_i)) = Var(\mu(\Theta))$
$\alpha = \frac{w_\bullet}{w_\bullet + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$	$\beta_i = \frac{\nu_{i\bullet}}{\nu_{i\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}, \quad \beta_\bullet = \sum_{i=1}^{I-1} \beta_i$
$\mathcal{D}^{Sp} = \{Z, X_j : j = 1, \dots, n\}$	$\tilde{\mathcal{D}} = \{Y_{ij} : i = 1, \dots, I - 1, j = 1, \dots, n\}$

Der beste Schätzer Z hinsichtlich des quadratischen Verlusts basierend auf der exogenen Information $\tilde{\mathcal{D}}$ kann sehr allgemein als Projektion im Hilbertraum \mathcal{L}^2 verstanden werden, wonach

$$Z = Pro\left(\mu_0 | L_e\left(\tilde{\mathcal{D}}\right)\right).$$

Vollständig analog (nur in anderer Notation) zum Vorgehen im Beweis des homogenen Credibility-Schätzers im Modell von Bühlmann-Straub (Seiten 87-89 in [BG05]) erhalten wir zunächst

$$\hat{Z} = Pro\left(\mu_0 | L_e\left(\tilde{\mathcal{D}}'\right)\right), \quad \tilde{\mathcal{D}}' = \{Y_i : i = 1, \dots, I - 1\}$$

und zeigen später $\widehat{Z} = Z = \text{Pro}(\mu_0 | L_e(\widetilde{\mathcal{D}}))$. Als Resultat erhalten wir schliesslich für Z als exogenen Schätzer für μ_0 basierend auf dem externen Kollektiv

$$Z = \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\beta_i}{\beta_\bullet} Y_i \quad (\text{analog zu } \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} = \sum_{i=1}^I \frac{\alpha_i}{\alpha_\bullet} X_i).$$

Für den quadratischen Verlust dieses Schätzers hinsichtlich μ_0 berechnen wir

$$\begin{aligned} E[(Z - \mu_0)^2] &= \text{Var}(Z) \\ &= \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\beta_i^2}{\beta_\bullet^2} \text{Var}(Y_i) + 2 \sum_{i=1}^{I-2} \sum_{k=i+1}^{I-1} \frac{\beta_i \beta_k}{\beta_\bullet^2} \underbrace{\text{Cov}(Y_i, Y_k)}_{=0} \quad (3.7) \\ &= \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\beta_i^2}{\beta_\bullet^2} \left(\frac{\sigma^2}{\nu_{i\bullet}} + \tau^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\beta_i^2}{\beta_\bullet^2} \frac{\tau^2}{\beta_i} = \frac{\tau^2}{\beta_\bullet} =: \zeta^2, \end{aligned}$$

wobei wir (3.7) analog zu (3.6) auf Seite 17 erhalten und die Unabhängigkeit der $(Y_i)_i$ untereinander verwenden.

Proposition 3.9 (Exogene Information aus einem Fremdkollektiv) *Unter den Modellannahmen 2.1 von Bühlmann-Straub und Notation 3.8 leitet sich die exogene Zufallsvariable Z folgendermassen aus einem Fremdkollektiv ab (zur Verwendung in Theorem 3.2):*

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\beta_i}{\beta_\bullet} Y_i \\ Y_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\nu_{ij}}{\nu_{i\bullet}} Y_{ij} \\ \zeta^2 &= \frac{\tau^2}{\beta_\bullet}. \end{aligned}$$

Beweis. Die Herleitung wurde unmittelbar der Proposition vorangehend bereits erbracht. \square

Der resultierende Credibility-Schätzer

Wir führen eine substitutive Notation ein, um das betrachtete Risiko und die exogene Information gemeinsam als ein Kollektiv von Risiken betrachten zu können (konsistent zu Bühlmann-Straub). Das einzelne betrachtete Risiko sei wie vorangehend das I -te Risiko im Gesamtkollektiv mit zusätzlich $I - 1$ externen Risiken. Grundlage ist die eingeführte Notation 3.8 auf Seite 22.

Notation 3.10 (Vereinheitlichte Notation)

Risikocharakteristika	$\Theta_i := \begin{cases} \Xi_i, & i = 1, \dots, I-1 \\ \Theta, & i = I \end{cases}$
Beobachtungsvektor	$\underline{X}_i^T := \begin{cases} Y_i^T, & i = 1, \dots, I-1 \\ \underline{X}^T, & i = I \end{cases}$ $:= (X_{i1}, \dots, X_{in})$
Gewichte	$w_{ij} := \begin{cases} \nu_{ij}, & i = 1, \dots, I-1 \\ w_j, & i = I \end{cases}$
Credibility-Gewichte	$\alpha_i := \begin{cases} \beta_i, & i = 1, \dots, I-1 \\ \alpha, & i = I \end{cases}$ $\alpha_\bullet := \sum_{i=1}^I \alpha_i = \beta_\bullet + \alpha$
Informationsbasis	$\mathcal{D} := \{X_{ij} : i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, n\}$
Innere Varianz	$\sigma^2 := E[\sigma^2(\Theta_i)]$
Äussere Varianz	$\tau^2 := \text{Var}(\mu(\Theta_i))$

Proposition 3.11 (Kompatibilität zu Bühlmann-Straub) *Unter den Modellannahmen 2.1 von Bühlmann-Straub auf Seite 9 ist der Credibility-Schätzer aus Theorem 3.2 auf Seite 16 mit Z aus Proposition 3.9 identisch zum homogenen Credibility-Schätzer von Bühlmann-Straub (Theorem 2.3 auf Seite 10), d.h.*

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}} &= \gamma \bar{X} + (1 - \gamma) Z \\ &= \alpha_I X_I + (1 - \alpha_I) \widehat{\widehat{\mu_0}}^{BS} = \widehat{\widehat{\mu(\Theta_I)}}^{\text{hom,BS}} \\ \text{für } Z &= \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\beta_i}{\beta_\bullet} Y_i. \end{aligned}$$

Beweis. Übersetzt in Notation 3.10 folgt aus Theorem 3.2 und Proposition 3.9:

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \frac{\tau^2}{\beta_\bullet} = \frac{\tau^2}{\alpha_\bullet - \alpha_I} \\ Z &= \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\beta_i}{\beta_\bullet} Y_i = \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_\bullet - \alpha_I} X_i \\ \bar{X} &= \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{w_\bullet} X_j = \sum_{j=1}^n \frac{w_{Ij}}{w_{I\bullet}} X_{Ij} = X_I \\ \alpha_I &= \frac{w_{I\bullet}}{w_{I\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \iff w_{I\bullet} = \frac{\sigma^2}{\tau^2} \frac{\alpha_I}{1 - \alpha_I} \\ \gamma &= \frac{w_\bullet}{w_\bullet + \frac{\sigma^2}{\tau^2 + \zeta^2}} = \frac{\frac{\alpha_I}{1 - \alpha_I}}{\frac{\alpha_I}{1 - \alpha_I} + \frac{\alpha_\bullet - \alpha_I}{\alpha_\bullet - \alpha_I + 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_I(\alpha_\bullet - \alpha_I + 1)}{\alpha_I(\alpha_\bullet - \alpha_I + 1) + (\alpha_\bullet - \alpha_I)(1 - \alpha_I)} \\
&= \alpha_I \frac{\alpha_\bullet - \alpha_I + 1}{\alpha_\bullet} = \alpha_I \left(1 + \frac{1 - \alpha_I}{\alpha_\bullet}\right)
\end{aligned}$$

Damit gilt also

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}} &= \gamma \bar{X} + (1 - \gamma)Z \\
&= \alpha_I \left(1 + \frac{1 - \alpha_I}{\alpha_\bullet}\right) X_I \\
&\quad + \left((1 - \alpha_I) - \frac{\alpha_I}{\alpha_\bullet} (1 - \alpha_I) \right) \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_\bullet - \alpha_I} X_i \\
&= \alpha_I X_I + \frac{\alpha_I}{\alpha_\bullet} (1 - \alpha_I) X_I \\
&\quad + \frac{\alpha_\bullet - \alpha_I}{\alpha_\bullet} (1 - \alpha_I) \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_\bullet - \alpha_I} X_i \\
&= \alpha_I X_I + (1 - \alpha_I) \left(\frac{\alpha_I}{\alpha_\bullet} X_I + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_\bullet} X_i \right) \\
&= \alpha_I X_I + (1 - \alpha_I) \widehat{\widehat{\mu_0}}^{\text{BS}} = \widehat{\widehat{\mu(\Theta_I)}}^{\text{hom,BS}}.
\end{aligned}$$

□

Kapitel 4

Erweiterung auf ein Kollektiv von Risiken

Im vorangehenden Kapitel 3 wurde die Motivation für die Bewertung eines einzelnen Risikos aufgrund seiner eigenen Risikoerfahrung und einer exogenen Information aus beliebiger Quelle eingebracht. Die Idee der Zuhilfenahme einer exogenen Zufallsvariable Z mit Erwartungswert μ_0 ist jedoch nicht nur im Falle eines fehlenden Kollektivs hilfreich, sondern kann generell als zusätzliche Informationsquelle im Credibility-Modell hinzugezogen werden nebst einem Kollektiv von Risiken. Als Hauptresultat stellen wir in diesem Kapitel Theorem 4.4 vor.

4.1 Bühlmann-Straub mit exogener Information

Die nachfolgenden Modellannahmen für einen Credibility-Schätzer basierend auf Beobachtungsvektoren eines Kollektivs von I Risiken sowie einer exogenen Zufallsvariablen Z entsprechen im Wesentlichen dem Modell von Bühlmann-Straub - dieses wird jedoch zusätzlich um die exogene Information erweitert.

Es wird sich zeigen, dass der inhomogene und homogene Bühlmann-Straub-Schätzer wie auch die in Kapitel 3 vorgestellten Credibility-Schätzer Spezialfälle unserer verallgemeinerten Version sind. Wie bisher werden wir neben dem Schätzer auch einige seiner Eigenschaften aufzeigen.

Modellannahmen 4.1 (exogene Information zum Risikokollektiv) Risiko $i \in \{1, \dots, I\}$ sei charakterisiert durch sein individuelles Risikoprofil ϑ_i , welches Realisation einer Zufallsvariable Θ_i ist. Gegeben sei weiter ein Beobachtungsvektor $\underline{X}_i^T = (X_{i1}, \dots, X_{in})$, $n \in \mathbb{N}$, und es gelten:

i) Bedingt, gegeben Θ_i , sind $\{X_{ij} : j = 1, \dots, n\}$ unabhängig mit

$$\begin{aligned} E[X_{ij}|\Theta_i] &= \mu(\Theta_i) \\ \text{Var}(X_{ij}|\Theta_i) &= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{ij}}. \end{aligned}$$

ii) Die Paare $(\Theta_1, \underline{X}_1), \dots, (\Theta_I, \underline{X}_I)$ sind unabhängig, und $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ sind unabhängig und identisch verteilt.

iii) Weiter sei gegeben eine Zufallsvariable Z (exogener Schätzer für μ_0) unabhängig von Θ_i und \underline{X}_i mit

$$\begin{aligned} E[Z] &= \mu_0 \\ \text{Var}(Z) &= \zeta^2. \end{aligned}$$

Aus den Modellannahmen folgt für die Strukturparameter direkt $E[\mu(\Theta_i)] = \mu_0 = E[X_{ij}]$, $\sigma^2 = E[\sigma^2(\Theta_i)]$ und $\tau^2 = \text{Var}(\mu(\Theta_i))$.

Theorem 4.2 (inhomogener Credibility-Schätzer) *Der inhomogene Credibility-Schätzer unter Modellannahmen 4.1 ist unabhängig von der Zufallsvariablen Z und damit identisch zum inhomogenen Credibility-Schätzer im Modell von Bühlmann-Straub (Modellannahmen 2.1):*

$$\begin{aligned} \widehat{\mu(\Theta_i)} &= \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \mu_0 = \widehat{\mu(\Theta_i)}^{BS} \\ \text{wobei } X_i &= \sum_{j=1}^n \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} X_{ij} \\ \alpha_i &= \frac{w_{i\bullet}}{w_{i\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}. \end{aligned}$$

Bevor wir zum Beweis von Theorem 4.2 übergehen, zeigen wir in Anlehnung an Lemma 1 auf Seite 81 in [BG05] den folgenden Hilfssatz:

Lemma 4.3 (Unabhängigkeit von Z) *Seien Θ_i ein Risikoparameter, $\underline{X}_i^T = (X_{i1}, \dots, X_{in})$ ein Beobachtungsvektor mit $E[X_{ij}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i)$ und Z eine Zufallsvariable mit $E[Z] = E[\mu(\Theta_i)] = \mu_0$ sowie*

- i) $\mu(\Theta_i) - \mu_0 \perp L(Z) := \{aZ : a \in \mathbb{R}\}$
- ii) $\mu(\Theta_i) - X_{ij} \perp L(Z)$.

Dann ist der (inhomogene) Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta_i)$ basierend auf \underline{X}_i , μ_0 und Z unabhängig von Z , d.h.

$$\text{Pro}(\mu(\Theta_i)|L(\underline{X}_i, Z, 1)) = \text{Pro}(\mu(\Theta_i)|L(\underline{X}_i, 1)).$$

Beweis Lemma 4.3. Zu zeigen: $\mu(\Theta_i) - \widehat{\mu(\Theta_i)} \perp L(Z)$, wobei $\widehat{\mu(\Theta_i)} = \text{Pro}(\mu(\Theta_i)|L(\underline{X}_i, 1))$. Daraus folgt $\widehat{\mu(\Theta_i)} = a_0 \mu_0 + \sum_{j=1}^n a_j X_{ij}$ mit $\sum_{j=0}^n a_j = 1$ wegen der Bias-Freiheit über dem Kollektiv. Somit gilt $\langle X, Y \rangle := E[X \cdot Y]$ Bilinearform mit $\langle X, Y \rangle = 0 \Leftrightarrow X \perp Y$:

$$\left\langle \mu(\Theta_i) - \widehat{\mu(\Theta_i)}, Z \right\rangle = \underbrace{a_0 \langle \mu(\Theta_i) - \mu_0, Z \rangle}_{=0 \text{ nach i)}} + \sum_{j=1}^n a_j \underbrace{\langle \mu(\Theta_i) - X_{ij}, Z \rangle}_{=0 \text{ nach ii)}} = 0.$$

□

Beweis Theorem 4.2. Wir zeigen die Voraussetzungen für Lemma 4.3 ($a \in \mathbb{R}$):

$$\text{i) } \langle \mu(\Theta_i) - \mu_0, aZ \rangle = E[(\mu(\Theta_i) - \mu_0) \cdot aZ] = \underbrace{(E[\mu(\Theta_i)] - \mu_0)}_{=\mu_0} \cdot aE[Z] = 0$$

wegen der Unabhängigkeit von Z .

$$\text{ii) } \langle \mu(\Theta_i) - X_{ij}, aZ \rangle = E[(\mu(\Theta_i) - X_{ij}) \cdot aZ] = \underbrace{(E[\mu(\Theta_i)] - E[X_{ij}])}_{=\mu_0} \cdot aE[Z] =$$

0 wegen der Unabhängigkeit von Z .

Mit Lemma 4.3 folgt somit, dass die exogene Information Z den inhomogenen Credibility-Schätzer nicht beeinflusst. Da die Modellannahmen 4.1 abgesehen von der exogenen Information Z (Punkt *iii*) identisch sind mit den Modellannahmen 2.1 von Bühlmann-Straub, sind auch die beiden inhomogenen Credibility-Schätzer gleich. \square

Wir wenden uns nun dem homogenen Credibility-Schätzer im Modell mit exogener Information in einem Risiko-Kollektiv zu:

Theorem 4.4 (homogener Credibility-Schätzer) *Unter den Modellannahmen 4.1 ist der homogene Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta_i)$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} &= \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \widehat{\widehat{\mu_0}} \\ \widehat{\widehat{\mu_0}} &= \sum_{k=1}^I a_k X_k + bZ \\ \text{wobei } a_k &= \frac{\alpha_k}{\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} \\ b &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha_\bullet} = 1 - a_\bullet \end{aligned}$$

und X_i, α_i wie in Theorem 4.2.

Bemerkung 4.5 *Man beachte, dass gemäss nachfolgendem Korollar 4.6 auf Seite 33 $\widehat{\widehat{\mu_0}}$ auch durch*

$$\widehat{\widehat{\mu_0}} = a_\bullet \widehat{\widehat{\mu_0}}^{\text{BS}} + bZ$$

gegeben ist, wobei $\widehat{\widehat{\mu_0}}^{\text{BS}} = \sum_k \frac{\alpha_k}{\alpha_\bullet} X_k$ in Theorem 2.3 auf Seite 2.3 gegeben ist und $a_\bullet = \sum_k a_k$.

Beweis. Wegen der Iterativität von Projektionen (Theorem 1.3 auf Seite 4) gilt

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} = \text{Pro} \left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} \middle| L_e(\mathcal{D}) \right) \quad (4.1)$$

$$\text{wobei } \mathcal{D} = \{Z, X_{ij} : i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, n\}$$

$$L_e(\mathcal{D}) = \left\{ \begin{aligned} &\widehat{\mu(\Theta)} : \widehat{\mu(\Theta)} = \sum_{i,j} a_{ij} X_{ij} + bZ, \quad (a_{ij})_{ij}, b \in \mathbb{R}, \\ &E[\widehat{\mu(\Theta)}] = E[\mu(\Theta)] \end{aligned} \right\}.$$

Die normierte Linearitätseigenschaft in affinen Unterräumen (Theorem B.11 in [BG05]) impliziert weiter

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} = \alpha_i \cdot \text{Pro}(X_i|L_e(\mathcal{D})) + (1 - \alpha_i) \cdot \text{Pro}(\mu_0|L_e(\mathcal{D})).$$

Ferner folgt wegen $E[X_i] = \sum_{j=1}^n \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} E[X_{ij}] = \mu_0$, dass

$$X_i \in L_e(X_{ij} : i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, n) \subset L_e(Z, (X_{ij})_{ij}) = L_e(\mathcal{D}).$$

Somit gilt $\text{Pro}(X_i|L_e(\mathcal{D})) = X_i$, und also ist

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} = \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \widehat{\mu_0} \quad \text{mit} \quad \widehat{\mu_0} = \text{Pro}(\mu_0|L_e(\mathcal{D})).$$

Berechnung von $\widehat{\mu_0}$:

X_i ist der beste lineare und individuell biasfreie Schätzer für $\mu(\Theta_i)$ basierend auf dem individuellen Beobachtungsvektor \underline{X}_i , d.h. X_i enthält alle Information aus \underline{X}_i hinsichtlich $\mu(\Theta_i)$, die aus einem linearen Schätzer gewonnen werden kann. Die Intuition spricht daher dafür, dass $\widehat{\mu_0}$ ausschliesslich von $\mathcal{D}' = \{Z, \quad X_i : i = 1, \dots, I\}$ abhängt, d.h. \mathcal{D}' ist eine Kompression von \mathcal{D} aus (4.1).

Wir bestimmen somit zunächst

$$\widehat{\mu_0} = \text{Pro}(\mu_0|L_e(\mathcal{D}')) \quad (4.2)$$

und zeigen dann, dass

$$\widehat{\mu_0} = \widehat{\mu_0} = \text{Pro}(\mu_0|L_e(\mathcal{D})).$$

$(X_i)_{i=1, \dots, I}, Z$ sind unabhängig mit $E[X_i] = \mu_0 = E[Z]$ (vgl. Modellannahmen 4.1 auf Seite 27), $\text{Var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}} + \tau^2 =: \frac{1}{\varrho_{X_i}}$ (analog zu (3.6) auf Seite 17) und $\text{Var}(Z) = \zeta^2 =: \frac{1}{\varrho_Z}$. Wie in der klassischen Statistik bekannt (vgl. Kapitel 1 auf Seite 75 in [BG05]), ist der biasfreie lineare Schätzer minimaler Varianz $\widehat{\mu_0}$ basierend auf \mathcal{D}' dann das gewichtete Mittel aus $(X_i)_{i=1, \dots, I}, Z$ mit Gewichten proportional zu den jeweiligen Präzisionen $(\varrho_{X_i})_{i=1, \dots, I}, \varrho_Z$:

$$\widehat{\mu_0} = \frac{1}{\sum_{k=1}^I \varrho_{X_k} + \varrho_Z} \left(\sum_{i=1}^I \varrho_{X_i} X_i + \varrho_Z Z \right) =: \sum_{i=1}^I a_i X_i + bZ.$$

Ausrechnen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^I \varrho_{X_k} + \varrho_Z &= \sum_{k=1}^I \frac{1}{\frac{\sigma^2}{w_{k\bullet}} + \tau^2} + \frac{1}{\zeta^2} = \frac{1}{\tau^2} \sum_{k=1}^I \frac{w_{k\bullet}}{\frac{\sigma^2}{\tau^2} + w_{k\bullet}} + \frac{1}{\zeta^2} \\ &= \frac{\alpha_\bullet}{\tau^2} + \frac{1}{\zeta^2} \\ a_i &= \frac{\varrho_{X_i}}{\sum_{k=1}^I \varrho_{X_k} + \varrho_Z} = \frac{1}{\left(\frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}} + \tau^2 \right) \left(\frac{\alpha_\bullet}{\tau^2} + \frac{1}{\zeta^2} \right)} \\ &= \frac{w_{i\bullet}}{\left(w_{i\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2} \right) \left(\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2} \right)} = \frac{\alpha_i}{\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} \\ b &= \frac{\varrho_Z}{\sum_{k=1}^I \varrho_{X_k} + \varrho_Z} = \frac{1}{1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha_\bullet}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Weiter muss $\widehat{\mu}_0 = \widehat{\widehat{\mu}}_0$ gelten, weil $(X_i)_{i=1,\dots,I}$ eine linear suffiziente Statistik bilden für $\mu(\Theta_k) \quad \forall k$ basierend auf \underline{X}_k , und $\widehat{\mu}_0^{\text{BS}} = \widehat{\widehat{\mu}}_0^{\text{BS}}$ im homogenen Fall von Bühlmann-Straub (Kapitel 4.6 in [BG05]). Der Vollständigkeit halber wird der Beweis dennoch aufgeführt:

$$\widehat{\mu}_0 = \widehat{\widehat{\mu}}_0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} i) \quad \mu_0 - \widehat{\mu}_0 \perp X_{kl} - X_{rs} \quad \forall k, r = 1, \dots, I \quad \forall l, s = 1, \dots, n \\ ii) \quad \mu_0 - \widehat{\mu}_0 \perp X_{kl} - Z \quad \forall k = 1, \dots, I \quad \forall l = 1, \dots, n \end{array} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} i) \quad & E[(\mu_0 - \widehat{\mu}_0)(X_{kl} - X_{rs})] \\ &= \text{Cov}(\widehat{\mu}_0, X_{rs} - X_{kl}) \\ &= \text{Cov}\left(\sum_i a_i X_i + bZ, X_{rs} - X_{kl}\right) \quad (4.5) \\ &= \sum_{i \in \{r, k\}} a_i \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} \text{Cov}(X_{ij}, X_{rs} - X_{kl}) \quad (4.6) \\ &= a_r \sum_j \frac{w_{rj}}{w_{r\bullet}} (E[\text{Cov}(X_{rj}, X_{rs} | \Theta_r)] + \text{Var}(\mu(\Theta_r))) \\ &\quad - a_k \sum_j \frac{w_{kj}}{w_{k\bullet}} (E[\text{Cov}(X_{kj}, X_{kl} | \Theta_k)] + \text{Var}(\mu(\Theta_k))) \quad (4.7) \\ &= a_r \left(\frac{w_{rs}}{w_{r\bullet}} E[\text{Var}(X_{rs} | \Theta_r)] + \tau^2 \right) \\ &\quad - a_k \left(\frac{w_{kl}}{w_{k\bullet}} E[\text{Var}(X_{kl} | \Theta_k)] + \tau^2 \right) \quad (4.8) \\ &= a_r \left(\frac{\sigma^2}{w_{r\bullet}} + \tau^2 \right) - a_k \left(\frac{\sigma^2}{w_{k\bullet}} + \tau^2 \right) \quad (4.9) \\ &= \zeta^2 b - \zeta^2 b = 0, \end{aligned}$$

wobei wir in (4.5) die Unabhängigkeit von Z verwendet haben, in (4.6) die Unabhängigkeit der $(X_i)_i$ untereinander und in (4.7) die bedingte Unabhängigkeit der $(X_{ij})_j \quad \forall i$. In (4.8) kamen die Modellannahmen 4.1 auf Seite 27 zum Einsatz und in (4.9) das Resultat aus (4.3).

$$\begin{aligned} ii) \quad & E[(\mu_0 - \widehat{\mu}_0)(X_{kl} - Z)] \\ &= \text{Cov}(\widehat{\mu}_0, Z - X_{kl}) \\ &= \text{Cov}\left(\sum_i a_i X_i + bZ, Z - X_{kl}\right) \\ &= \underbrace{b \text{Var}(Z)}_{=\zeta^2} - \underbrace{\sum_i a_i \text{Cov}(X_i, X_{kl})}_{=\zeta^2 b} \\ &= b\zeta^2 - \zeta^2 b = 0 \end{aligned}$$

analog zur Berechnung in *i*).

Damit folgt $\widehat{\mu}_0 = \widehat{\widehat{\mu}}_0$, und Theorem 4.4 ist bewiesen. \square

Es ist möglich, einen Teil des Beweises alternativ rein rechnerisch zu gestalten, ohne zur Berechnung von $\widehat{\mu}_0$ in (4.2) auf ein Resultat aus der klassischen Statistik zurückgreifen zu müssen. Die Alternative ist länger und sicherlich weniger elegant, bietet jedoch eine andere Perspektive und wird darum ebenfalls aufgeführt.

Alternativer Beweis (Berechnung von $\widehat{\mu}_0$). Wir setzen an der Stelle (4.2) auf Seite 30 an und bestimmen $\widehat{\mu}_0 = \text{Pro}(\mu_0 | L_e(\mathcal{D}'))$, $\mathcal{D}' = \{Z, X_i : i = 1, \dots, I\}$ mit dem linearen Ansatz

$$\widehat{\mu}_0 = \sum_{i=1}^I a_i X_i + bZ, \quad (a_i)_i, b \in \mathbb{R}.$$

Wegen der Biasfreiheit im Kollektiv und $E[Z] = \mu_0 = E[X_i] \quad \forall i$ gilt

$$\sum_{i=1}^I a_i + b = 1. \quad (4.10)$$

Aufgrund der Projektion gelten zudem $(\langle X, Y \rangle = E[X \cdot Y], X \perp Y \Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0)$

$$\begin{aligned} i) \quad & \mu_0 - \widehat{\mu}_0 \perp X_k - X_r \quad \forall k, r = 1, \dots, I \\ ii) \quad & \mu_0 - \widehat{\mu}_0 \perp X_k - Z \quad \forall k = 1, \dots, I, \end{aligned}$$

was wir zur Weiterverwendung umformen:

i) Die Orthogonalitätsbedingung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= E[(\mu_0 - \widehat{\mu}_0)(X_k - X_r)] = \text{Cov}(\widehat{\mu}_0, X_r - X_k) \\ &= \text{Cov}\left(\sum_i a_i X_i + bZ, X_r - X_k\right) \\ &= \sum_i a_i \text{Cov}(X_i, X_r - X_k) \\ &= a_r \text{Var}(X_r) - a_k \text{Var}(X_k) \\ &= a_r \left(\frac{\sigma^2}{w_{r\bullet}} + \tau^2\right) - a_k \left(\frac{\sigma^2}{w_{k\bullet}} + \tau^2\right) \\ \Leftrightarrow a_i \left(\frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}} + \tau^2\right) &= \text{konst} \quad \text{über } i = 1, \dots, I \quad (4.11) \end{aligned}$$

wobei wieder die Unabhängigkeit von Z , die Unabhängigkeit von $(X_i)_i$ untereinander und das Resultat aus (3.6) verwendet wurden.

ii) Die Orthogonalitätsbedingung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
0 &= E[(\mu_0 - \widehat{\mu}_0)(X_k - Z)] = Cov(\widehat{\mu}_0, Z - X_k) \\
&= Cov\left(\sum_i a_i X_i + bZ, Z - X_k\right) \\
&= bVar(Z) - \sum_i a_i Cov(X_i, X_k) \\
&= b\zeta^2 - a_k Var(X_k) \\
&= b\zeta^2 - a_k \left(\frac{\sigma^2}{w_{k\bullet}} + \tau^2\right) \\
\Leftrightarrow a_i \left(\frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}} + \tau^2\right) &= b\zeta^2 \quad \forall i = 1, \dots, I
\end{aligned} \tag{4.12}$$

was (4.11) impliziert.

Gleichung (4.12) in (4.10) eingesetzt führt auf

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_i \frac{b\zeta^2}{\frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}} + \tau^2} + b \Leftrightarrow \\
b &= \frac{1}{1 + \sum_i \frac{\zeta^2}{\frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}} + \tau^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha_\bullet},
\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$a_i = \frac{b\zeta^2}{\frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}} + \tau^2} = \frac{\zeta^2}{\left(\frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}} + \tau^2\right) \left(1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha_\bullet\right)} = \frac{\alpha_i}{\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2}}.$$

Im Folgenden ist wiederum $\widehat{\mu}_0 = \widehat{\widehat{\mu}}_0$ zu verifizieren wie ab (4.4). \square

Aus den Überlegungen im ersten Beweis von Theorem 4.4 lässt sich nun eine weitere Betrachtung hinsichtlich des Allgemeinen Intuitiven Prinzips vollziehen.

$\widehat{\widehat{\mu}}_0^{BS} = \sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha_\bullet} X_i$ ist eine linear suffiziente Statistik für μ_0 basierend auf $\mathcal{D}^{BS} := \{X_{ij} : i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, n\}$, des Weiteren sind $\widehat{\widehat{\mu}}_0^{BS}$ und Z unabhängig. Somit ist $\widehat{\widehat{\mu}}_0 = \sum_i a_i X_i + bZ$ darstellbar als gewichtetes Mittel aus dem analogen Term $\widehat{\widehat{\mu}}_0^{BS}$ in Bühlmann-Straub und der exogenen Information Z mit Gewichten proportional zur jeweiligen Präzision hinsichtlich μ_0 , wobei die Gewichte mit $a_\bullet = 1 - b$ und b bereits durch Theorem 4.4 gegeben sind.

Korollar 4.6 (Allgemeines Intuitives Prinzip für $\widehat{\widehat{\mu}}_0$) In Theorem 4.4 hat für $\widehat{\widehat{\mu}}_0$ das Allgemeine Intuitive Prinzip folgendermassen Gültigkeit:

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{\mu}}_0 &= a_\bullet \widehat{\widehat{\mu}}_0^{BS} + bZ, \\
\text{wobei } b &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha_\bullet}.
\end{aligned}$$

Der rechnerische Nachweis ertübrigt sich zwar aus den vorangehenden Ausführungen, wird der Vollständigkeit halber und seiner Kürze wegen jedoch trotzdem gegeben:

Beweis. Aus Theorem 4.4 folgt für gegebene $(a_i)_i$ und b

$$\widehat{\mu}_0 = \sum_i a_i X_i + bZ = \frac{\alpha_\bullet}{\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} \sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha_\bullet} X_i + bZ = a_\bullet \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} + bZ.$$

Weiter

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\widehat{\mu}_0^{\text{BS}}\right) &= \sum_i \frac{\alpha_i^2}{\alpha_\bullet^2} \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{k=i+1}^I \frac{\alpha_i \alpha_k}{\alpha_\bullet^2} \text{Cov}(X_i, X_k) \\ &= \sum_i \frac{\alpha_i^2}{\alpha_\bullet^2} \left(\frac{\sigma^2}{w_i} + \tau^2 \right) = \sum_i \frac{\alpha_i^2}{\alpha_\bullet^2} \frac{\tau^2}{\alpha_i} = \frac{\tau^2}{\alpha_\bullet} =: \varrho_{\text{BS}} \\ \text{Var}(Z) &= \zeta^2 =: \frac{1}{\varrho_Z} \end{aligned}$$

und damit das Gewicht für $\widehat{\mu}_0^{\text{BS}}$

$$\frac{\varrho_{\text{BS}}}{\varrho_{\text{BS}} + \varrho_Z} = \frac{\alpha_\bullet}{\tau^2 \left(\frac{\alpha_\bullet}{\tau^2} + \frac{1}{\zeta^2} \right)} = \frac{\alpha_\bullet}{\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} = a_\bullet = 1 - b.$$

□

4.2 Eigenschaften der Credibility-Schätzer

Wir betrachten zunächst die zu Bühlmann-Straub vergleichbare Balance-Eigenschaft des homogenen Schätzers. Im Anschluss führen wir den quadratischen Verlust des inhomogenen und homogenen Credibility-Schätzers aus Theorem 4.2 und 4.4 auf, wobei deren Verhalten in Abhängigkeit von den Strukturparametern sich analog zu Kapitel 3.3 auf Seite 19 gestaltet.

Bemerkung 4.7 (Balance-Eigenschaft des homogenen Schätzers) *Der homogene Credibility-Schätzer für $\mu(\Theta_i)$ unter Modellannahmen 4.1 erfüllt die folgende Balance-Eigenschaft: In Erwartung wird mittels $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}}$ eingenommen, was an Schaden anfällt (dies gilt für alle Credibility-Schätzer). Die tatsächlich resultierende Differenz ist jedoch abhängig von der Zufallsvariablen Z und beträgt*

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{ij} \left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} - X_{ij} \right) = \left(\widehat{\mu}_0 - \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} \right) \frac{\sigma^2}{\tau^2} \alpha_\bullet = \left(Z - \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} \right) \frac{\sigma^2}{\zeta^2} a_\bullet,$$

wobei $\widehat{\mu}_0$, $a_\bullet = \sum_i a_i$ durch Theorem 4.4 und $\widehat{\mu}_0^{\text{BS}}$ durch Theorem 2.3 gegeben sind.

Beweis. Wir betrachten die Differenz aus den totalen Einnahmen mittels homogenem Credibility-Schätzer und der total beobachteten anfallenden Schadenhöhe:

$$\begin{aligned}
\sum_{ij} w_{ij} \left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - X_{ij} \right) &= \sum_i w_{i\bullet} \left(\alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \widehat{\mu}_0 - X_i \right) \\
&= \sum_i w_{i\bullet} (1 - \alpha_i) \left(\widehat{\mu}_0 - X_i \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\tau^2} \sum_i \alpha_i \left(\widehat{\mu}_0 - X_i \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\tau^2} \alpha_\bullet \left(\widehat{\mu}_0 - \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\tau^2} \alpha_\bullet \left(\sum_{i=1}^I a_i X_i + bZ - \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\tau^2} \alpha_\bullet \left(\frac{\alpha_\bullet}{\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} + \frac{1}{1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha_\bullet} Z - \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} \right) \\
&= \frac{\sigma^2 \tau^2}{\tau^2 \zeta^2} \frac{\alpha_\bullet}{\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} \left(Z - \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\zeta^2} a_\bullet \left(Z - \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} \right).
\end{aligned}$$

□

Da der inhomogene Schätzer identisch ist mit dem inhomogenen Schätzer von Bühlmann-Straub, verweisen wir auf die entsprechende Proposition 2.4 auf Seite 10 und fahren mit dem homogenen Schätzer fort.

Proposition 4.8 (Quadratischer Verlust des homogenen Schätzers) *Der quadratische Verlust des Credibility-Schätzers $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}}$ aus Theorem 4.4 ist gegeben durch*

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \tau^2 (1 - \alpha_i) \left(1 + \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} \right).$$

Beweis. Wegen der Iterativität von Projektionen (Theorem 1.3), $L_e(Z, (X_{ij})_{ij}) \subset L(Z, (X_{ij})_{ij}, 1)$ und

$$Pro(\mu(\Theta_i) | L(Z, (X_{ij})_{ij}, 1)) = Pro(\mu(\Theta_i) | L((X_{ij})_{ij}, 1))$$

(siehe Lemma 4.3) gilt

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} = Pro(Pro(\mu(\Theta_i) | L((X_{ij})_{ij}, 1)) | L_e(Z, (X_{ij})_{ij})).$$

Somit (Pythagoras)

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} \right)^2 \right] + E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right]. \quad (4.13)$$

Da $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{BS}}$, gilt nach Proposition 2.4 auf Seite 10

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \tau^2(1 - \alpha_i). \quad (4.14)$$

Weiter ist

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} \right)^2 \right] = (1 - \alpha_i)^2 E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu_0}} - \mu_0 \right)^2 \right]. \quad (4.15)$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu_0}} - \mu_0 \right)^2 \right] &= E \left[\left(\sum_i a_i (X_i - \mu_0) + b(Z - \mu_0) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\sum_i a_i (X_i - \mu_0) \right)^2 \right] + b^2 \text{Var}(Z) \\ &\quad + 2b \sum_i a_i \underbrace{\text{Cov}(X_i, Z)}_{=0} \\ &= \sum_i a_i^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{k=i+1}^I a_i a_k \underbrace{\text{Cov}(X_i, X_k)}_{=0 \text{ (} i \neq k)} + b^2 \zeta^2 \\ &= \sum_i a_i^2 \left(\frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}} + \tau^2 \right) + \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha_\bullet \right)^2} \zeta^2 \\ &= \sum_i \frac{\alpha_i^2}{\left(\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2} \right)^2} \frac{\tau^2}{\alpha_i} + \frac{1}{\left(\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2} \right)^2} \frac{\tau^4}{\zeta^2} \\ &= \frac{\tau^2}{\left(\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2} \right)^2} \left(\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2} \right) = \frac{\tau^2}{\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2}}, \end{aligned}$$

wobei wir die Unabhängigkeit von Z sowie die Unabhängigkeit (und damit Unkorreliertheit) von $(X_i)_i$ untereinander verwendet haben.

Folglich ist nach (4.13), (4.14) und (4.15)

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] &= (1 - \alpha_i)^2 \frac{\tau^2}{\alpha_{\bullet} + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} + \tau^2(1 - \alpha_i) \\
&= \tau^2(1 - \alpha_i) \left(\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_{\bullet} + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} + 1 \right).
\end{aligned}$$

□

4.3 Bühlmann-Straub als Spezialfall

Wie in Kapitel 4.1 eingangs erklärt, sollte der neu entwickelte homogene Credibility-Schätzer für ein Kollektiv von Risiken und zusätzliche exogene Information sowohl den inhomogenen und homogenen Credibility-Schätzer von Bühlmann-Straub, als auch den in Kapitel 3.2 hergeleiteten Credibility-Schätzer enthalten. Gestützt auf die Modellannahmen 4.1 zeigen wir in diesem Kapitel, dass die Bühlmann-Straub-Schätzer (Theoreme 2.2 und 2.3) direkt aus jenem in Theorem 4.4 auf Seite 29 folgen. Der spezielle Schätzer aus Theorem 3.2 auf Seite 16 wird im späteren Abschnitt 4.4 auf Seite 39 behandelt.

4.3.1 Der inhomogene Bühlmann-Straub-Schätzer

Was die Modellannahmen 4.1 auf Seite 27 vom Modell 2.1 von Bühlmann-Straub auf Seite 9 unterscheidet, ist der dritte Punkt *iii*) über die zur Verfügung stehende exogene Information in Form einer Zufallsvariablen Z mit $E[Z] = \mu_0$ und $Var(Z) = \zeta^2$. In unserem *homogenen* Credibility-Schätzer

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} = \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \widehat{\widehat{\mu_0}}$$

kommt dieser Unterschied zum *inhomogenen* Schätzer von Bühlmann-Straub dadurch zum Ausdruck, dass in letzterem an Stelle von $\widehat{\widehat{\mu_0}} = \sum_{k=1}^I a_k X_k + bZ$ das feste kollektive Mittel $E[\widehat{\widehat{\mu_0}}] = \mu_0 = E[Z]$ vorzufinden ist:

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{BS}} = \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \mu_0.$$

Die Zufallsvariable Z beschreibt eine exogene Information über das unbekannte kollektive Mittel μ_0 , die mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist, welche wiederum durch $Var(Z) = \zeta^2$ ausgedrückt wird. Je kleiner diese Unsicherheit ζ^2 wird, desto zuverlässiger beschreibt die Zufallsvariable Z das kollektive Mittel μ_0 . Wir betrachten also die asymptotische Situation im Limes, wenn $\zeta^2 \rightarrow 0$, wobei wir der Einfachheit halber die äquivalente Darstellung nach dem Allgemeinen Intuitiven Prinzip für $\widehat{\widehat{\mu_0}}$ aus Korollar 4.6 auf Seite 33 wählen:

$$\widehat{\widehat{\mu_0}} = a_{\bullet} \widehat{\widehat{\mu_0}}^{\text{BS}} + bZ, \quad b = \frac{1}{1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha_{\bullet}} = 1 - a_{\bullet}.$$

Es gelten

$$\begin{aligned}
Z &\longrightarrow E[Z] = \mu_0 \quad \text{für} \quad \zeta^2 \longrightarrow 0 \\
b &= 1 - a_{\bullet} = \frac{1}{1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha_{\bullet}} \longrightarrow 1 \quad \text{für} \quad \zeta^2 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_0 &= a_\bullet \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} + bZ \longrightarrow \mu_0 \quad \text{für } \zeta^2 \longrightarrow 0 \\ \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \widehat{\mu}_0 &\longrightarrow \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \mu_0 \quad \text{für } \zeta^2 \longrightarrow 0, \text{ d.h.} \\ \widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} &\longrightarrow \widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{BS}} \quad \text{für } \zeta^2 \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

wobei $\forall i : \alpha_i, X_i$ und $\widehat{\mu}_0^{\text{BS}}$ unabhängig sind von ζ^2 . Wir bemerken weiter, dass konsequenterweise

$$\tau^2 (1 - \alpha_i) \left(1 + \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_\bullet + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} \right) \longrightarrow \tau^2 (1 - \alpha_i) \quad \text{für } \zeta^2 \longrightarrow 0$$

und somit (vgl. Propositionen 4.8 und 2.4)

$$E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] \longrightarrow E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{BS}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] \quad \text{für } \zeta^2 \longrightarrow 0.$$

Damit ist der inhomogene Credibility-Schätzer von Bühlmann-Straub ein Spezialfall unseres homogenen Schätzers mit exogener Information im Falle der absoluten Verlässlichkeit dieser exogenen Information.

4.3.2 Der homogene Bühlmann-Straub-Schätzer

Je grösser die Schwankung ζ^2 der exogenen Zufallsvariablen Z wird, desto geringer werden die Aussagekraft und der Einfluss von Z im Credibility-Modell. Wir betrachten wieder asymptotisch die Situation im Limes, diesmal für $\zeta^2 \longrightarrow \infty$:

$$b = 1 - a_\bullet = \frac{1}{1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha_\bullet} \longrightarrow 0 \quad \text{für } \zeta^2 \longrightarrow \infty,$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_0 &= a_\bullet \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} + bZ \longrightarrow \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} \quad \text{für } \zeta^2 \longrightarrow \infty \\ &\text{punktweise für jede Realisation von } Z \text{ in } \mathbb{R} \\ \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \widehat{\mu}_0 &\longrightarrow \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} \quad \text{für } \zeta^2 \longrightarrow \infty, \text{ d.h.} \\ \widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} &\longrightarrow \widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom,BS}} \quad \text{für } \zeta^2 \longrightarrow \infty\end{aligned}$$

aufgrund der Unabhängigkeit von $\alpha_i, X_i \quad \forall i$ und $\widehat{\mu}_0^{\text{BS}}$ von ζ^2 . Des Weiteren gilt für die Balance-Eigenschaft (Bemerkung 4.7 auf Seite 34) im Limes das bekannte Resultat aus Bühlmann-Straub (Proposition 2.6 auf Seite 11):

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{ij} \left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} - X_{ij} \right) = \left(\widehat{\mu}_0 - \widehat{\mu}_0^{\text{BS}} \right) \frac{\sigma^2}{\tau^2} \alpha_\bullet \longrightarrow 0 \quad \text{für } \zeta^2 \longrightarrow \infty,$$

und hinsichtlich des quadratischen Verlusts erhalten wir für $\zeta^2 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \tau^2 (1 - \alpha_i) \left(1 + \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_{\bullet} + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} \right) &\longrightarrow \tau^2 (1 - \alpha_i) \left(1 + \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_{\bullet}} \right), \text{ d.h.} \\ E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] &\longrightarrow E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom,BS}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Demzufolge ist der homogene Credibility-Schätzer von Bühlmann-Straub ein Spezialfall unseres homogenen Schätzers mit exogener Information im Falle der verschwindenden Verlässlichkeit dieser exogenen Information.

4.4 Restriktion auf ein spezielles Risiko

Unsere Credibility-Schätzer mit exogener Information für ein einzelnes Risiko beziehungsweise ein Kollektiv von Risiken wurden unterschiedlich hergeleitet. Wir zeigen in diesem Kapitel, dass das allgemeinere Modell auch im Falle eines einzigen Risikos Gültigkeit hat und dass daraus die Ergebnisse aus Kapitel 3 resultieren.

4.4.1 Der homogene Credibility-Schätzer für ein singuläres Kollektiv

Wir setzen nunmehr die Modellannahmen 3.1 voraus und restringieren den Credibility-Schätzer aus Theorem 4.4 auf Seite 29 mitsamt seinen Komponenten auf ein Kollektiv mit einem einzigen Risiko ($I = 1$). Dadurch erhalten wir:

kollektiv	speziell
$X_{ij}, w_{ij}, w_{i\bullet} = \sum_{j=1}^n w_{ij}$	$X_j, w_j, w_{\bullet} = \sum_{j=1}^n w_j$
$\alpha_i = \frac{w_{i\bullet}}{w_{i\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}, \quad \alpha_{\bullet} = \sum_{i=1}^I \alpha_i$	$\alpha = \frac{w_{\bullet}}{w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} = \alpha_{\bullet}$
$X_i = \sum_{j=1}^n \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} X_{ij}$	$\bar{X} = \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{w_{\bullet}} X_j$
$a_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_{\bullet} + \frac{\tau^2}{\zeta^2}}$	$a = \frac{\alpha}{\alpha + \frac{\tau^2}{\zeta^2}}$
$b = \frac{1}{1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha_{\bullet}}$	$b = \frac{1}{1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha} = 1 - a$
$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} = \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) \widehat{\widehat{\mu_0}}$	$\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom,Sp}}$
$\widehat{\widehat{\mu_0}} = \sum_{k=1}^I a_k X_k + bZ$	$\widehat{\widehat{\mu_0}}^{\text{Sp}}$
$\widehat{\widehat{\mu_0}}^{\text{BS}} = \sum_{k=1}^I \frac{\alpha_k}{\alpha_{\bullet}} X_k$	$\widehat{\widehat{\mu_0}}^{\text{BS,Sp}}$

Somit folgt für den homogenen Credibility-Schätzer mit exogener Information restringiert auf ein spezielles Risiko

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom,Sp}} &= \alpha \bar{X} + (1 - \alpha) \widehat{\widehat{\mu_0}}^{\text{Sp}} \\ \widehat{\widehat{\mu_0}}^{\text{Sp}} &= a \bar{X} + bZ \end{aligned} \tag{4.16}$$

und ferner

$$\widehat{\widehat{\mu_0}}^{\text{BS,Sp}} = \sum_{k=1}^1 \frac{\alpha}{\alpha} \bar{X} = \bar{X}.$$

Der quadratische Verlust ergibt zudem (vgl. Proposition 4.8 auf Seite 35)

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom,Sp}} - \mu(\Theta) \right)^2 \right] = \tau^2 (1 - \alpha) \left(1 + \frac{1 - \alpha}{\alpha + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} \right).$$

4.4.2 Konsistenz zum Modell eines einzelnen Risikos

In Kapitel 3.2 haben wir in Theorem 3.2 auf Seite 16 folgendes Resultat erhalten:

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}} &= \gamma \bar{X} + (1 - \gamma)Z, \\ \text{wobei } \gamma &= \frac{w_{\bullet}}{w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2 + \zeta^2}}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass der restringierte homogene Credibility-Schätzer (4.16) mit diesem übereinstimmt:

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom,Sp}} &= \alpha \bar{X} + (1 - \alpha) (a \bar{X} + bZ) & (4.17) \\ &= \alpha \left(1 + \frac{(1 - \alpha)}{\alpha + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} \right) \bar{X} + \frac{(1 - \alpha)}{1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha} Z \\ &= \alpha \left(1 + \frac{\frac{\sigma^2}{\tau^2}}{w_{\bullet} + \frac{\tau^2}{\zeta^2} (w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2})} \right) \bar{X} + \frac{\frac{\sigma^2}{\tau^2}}{(w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}) \left(1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \alpha \right)} Z \\ &= \frac{w_{\bullet}}{w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \frac{(w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}) \left(1 + \frac{\tau^2}{\zeta^2} \right)}{w_{\bullet} \left(1 + \frac{\tau^2}{\zeta^2} \right) + \frac{\sigma^2}{\zeta^2}} \bar{X} \\ &\quad + \frac{\sigma^2 \left(w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2} \right)}{(w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}) \left((\tau^2 w_{\bullet} + \sigma^2) + \zeta^2 w_{\bullet} \right)} Z \\ &= \frac{w_{\bullet}}{w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2 + \zeta^2}} \bar{X} + \frac{\sigma^2}{(\tau^2 + \zeta^2) w_{\bullet} + \sigma^2} Z \\ &= \gamma \bar{X} + (1 - \gamma)Z = \widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom}}. \end{aligned}$$

Gleichermassen gilt damit natürlich

$$\begin{aligned} E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{\text{hom,Sp}} - \mu(\Theta) \right)^2 \right] &= \tau^2 (1 - \alpha) \left(1 + \frac{1 - \alpha}{\alpha + \frac{\tau^2}{\zeta^2}} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \left(1 + \frac{\frac{\sigma^2}{\tau^2}}{w_{\bullet} + \frac{\tau^2}{\zeta^2} (w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2})} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \frac{\left(1 + \frac{\tau^2}{\zeta^2} \right) \left(w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2} \right)}{w_{\bullet} \left(1 + \frac{\tau^2}{\zeta^2} \right) + \frac{\sigma^2}{\zeta^2}} \\ &= \frac{\sigma^2}{w_{\bullet} + \frac{\sigma^2}{\zeta^2} \frac{\zeta^2}{\tau^2 + \zeta^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\tau^2 + \zeta^2)(1 - \gamma) \\ &= E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta)}^{\text{hom}} - \mu(\Theta) \right)^2 \right], \end{aligned}$$

was dem Resultat von Proposition 3.5 auf Seite 19 entspricht.

Kapitel 5

Zeitinhomogene Credibility

Das vorliegende Kapitel widmet sich der Frage, wie einer sich ändernden Risikocharakteristik Rechnung getragen werden kann, wenn äussere Einflüsse mit der Zeit die korrekte individuelle Prämie schwanken lassen. Es werden ein ausgewähltes zeitinhomogenes Modell und dessen resultierende Credibility-Schätzer besprochen und Eigenschaften aufgezeigt. Wir beweisen daraufhin die Kompatibilität des Modells und der Schätzer zum klassischen Bühlmann-Straub-Modell. Schliesslich wird die in unserer Konstruktion vorherrschende Problematik der Strukturparameterschätzung diskutiert, und ein Lösungsansatz mittels Regression wird vorgestellt.

5.1 Motivation für evolutionäre Modelle

Die bisher beschriebenen Credibility-Modelle wie auch die meisten verbreiteten Modelle in der Literatur und in der Praxis basieren auf der Annahme, dass die korrekte individuelle Prämie konstant bleibt innerhalb der zu Grunde liegenden Observationsperiode.

In der Praxis ändern sich die meisten realen Risiken jedoch ständig. Beispielsweise schwanken die individuellen Risikoprofile versicherter Unternehmungen einer Kollektiv-Lebensversicherung abhängig von Einflüssen wie Personalfuktuationen, dem alternden Bestand oder der Marktsituation, welche a priori nicht zu erfassen und darum von stochastischer Natur sind. Auch können Änderungen innerhalb der Geschäftsorganisation oder des Managements einen schwer abschätzbaren Einfluss auf Faktoren wie die Arbeitsatmosphäre eines Betriebs haben, welche die Risikocharakteristik hinsichtlich Invalidität beeinträchtigen.

Solche Änderungen der Risikocharakteristika stehen im Zentrum *evolutionärer Credibility-Modelle*, wo sich die korrekten individuellen Risikoprämien mit der Zeit *stochastisch* ändern.

Wir schränken uns im Rahmen dieser Arbeit auf eine spezielle Klasse evolutionärer Modelle ein - auf zeitinhomogene Modelle mit einer bestimmten Schwankung in der Zeit um ein vom betrachteten Risiko abhängiges, in der Zeit konstantes Niveau herum. Die Idee wird durch die nachfolgenden Illustrationen verdeutlicht:

In der klassischen Modellsituation, wie sie beispielsweise bei Bühlmann-Straub oder den Modellen der Kapitel 3 und 4 auftritt, bleibt die korrekte individuelle

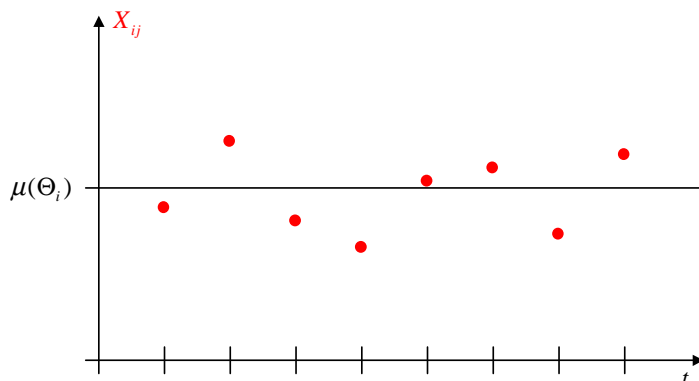


Abbildung 5.1: Schwankung der Beobachtungen um die korrekte individuelle Prämie in der klassischen Situation

Prämie $\mu(\Theta_i)$ konstant in der Zeit, und die Beobachtungen X_{ij} des betrachteten Risikos schwanken zufällig um dieses Niveau herum wie in Abbildung 5.1 dargestellt.

Unser in den nachfolgenden Kapiteln betrachtetes zeitinhomogenes Modell lässt eine zufällige Abweichung Δ_{ij} der korrekten individuellen Prämie $\mu(\Theta_{ij})$ (dargestellt durch blaue Ringe) vom Risiko-gegebenen, in der Zeit konstanten Niveau $\mu(\Theta_i)$ zu, wobei die Beobachtungen X_{ij} (dargestellt durch rote Punkte) des betrachteten Risikos ihrerseits um die $\mu(\Theta_{ij})$ herum schwanken. Diese Situation ist in Abbildung 5.2 illustriert.

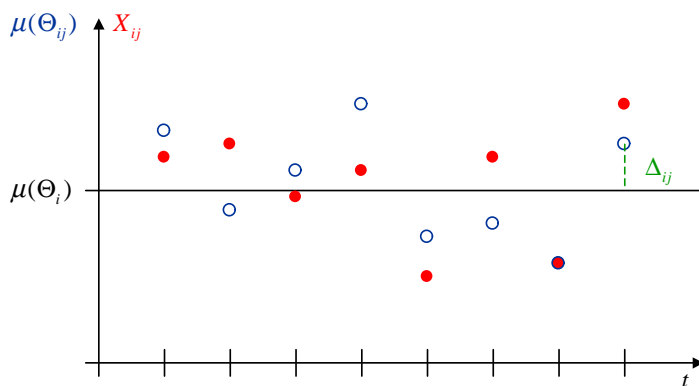


Abbildung 5.2: Schwankung der Beobachtungen um die korrekte individuelle Prämie in der zeitinhomogenen Situation

Im nachfolgenden Kapitel wird dieses Modell konkretisiert, um im Anschluss die resultierenden Credibility-Schätzer und deren Eigenschaften anzugeben.

5.2 Formales Modell und Credibility-Schätzer

Anhand der im vorangehenden Kapitel 5.1 beschriebenen Situation gehen wir direkt über zu den Modellannahmen:

Modellannahmen 5.1 (Zeitinhomogenes (evolutionäres) Modell) *Das Risiko $i \in \{1, \dots, I\}$ sei charakterisiert durch sein individuelles Risikoprofil ϑ_i , welches Realisation einer Zufallsvariable Θ_i ist. Die Risikocharakteristik ändert mit der Zeit $j \in \mathbb{N}$ und bildet so einen stochastischen Prozess $\underline{\Theta}_i = \{\Theta_{i1}, \Theta_{i2}, \dots, \Theta_{ij}, \dots\}$. Gegeben sei weiter ein Beobachtungsvektor $\underline{X}_i^T = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ij}, \dots)$, $j \in \mathbb{N}$, und es gelten:*

i) *Die korrekte individuelle Prämie ist ein reellwertiger stochastischer Prozess*

$$\underline{\mu}(\Theta_i) = \{\mu(\Theta_{i1}), \mu(\Theta_{i2}), \dots, \mu(\Theta_{ij}), \dots\},$$

wobei

$$\mu(\Theta_{ij}) = \mu(\Theta_i) + \Delta_{ij},$$

und $\{\mu(\Theta_i) : i = 1, \dots, I\}$ unabhängig und identisch verteilt, und die Zufallsvariablen $\{\Delta_{ij} : i = 1, \dots, I, j \in \mathbb{N}\}$ unabhängig voneinander wie auch von $\mu(\Theta_i)$ mit

$$\begin{aligned} E[\Delta_{ij}] &= 0 \\ \text{Var}(\Delta_{ij}) &= \delta^2. \end{aligned}$$

ii) *Bedingt, gegeben $\underline{\Theta}_i$, sind $\{X_{ij} : j \in \mathbb{N}\}$ unabhängig mit*

$$\begin{aligned} E[X_{ij} | \underline{\Theta}_i] &= E[X_{ij} | \Theta_{ij}] = \mu(\Theta_{ij}) \\ \text{Var}(X_{ij} | \underline{\Theta}_i) &= \text{Var}(X_{ij} | \Theta_{ij}) = \frac{\sigma^2(\Theta_{ij})}{w_{ij}}. \end{aligned}$$

iii) *Die Paare $(\Theta_1, \underline{X}_1), \dots, (\Theta_I, \underline{X}_I)$ sind unabhängig, und $\underline{\Theta}_1, \dots, \underline{\Theta}_I$ sind unabhängig und identisch verteilt.*

Aus den Modellannahmen folgt für die Strukturparameter direkt $E[\mu(\Theta_{ij})] = E[\mu(\Theta_i)] = \mu_0 = E[X_{ij}]$, $\sigma^2 = E[\sigma^2(\Theta_{ij})]$, $\tau^2 = \text{Var}(\mu(\Theta_i))$ und $\text{Var}(\mu(\Theta_{ij})) = \tau^2 + \delta^2$.

Das hiermit beschriebene Credibility-Modell kann wie in Abbildung 5.3 dargestellt als hierarchisches Credibility-Modell interpretiert werden: Ausgangspunkt ist das kollektive Mittel μ_0 , aus welchem gemäss der individuellen Risikocharakteristik die individuellen Prämienniveaus als Knoten folgen. Der stochastische Prozess der Veränderung dieser Charakteristik mit der Zeit bestimmt untergeordnet die korrekte individuelle Risikoprämie zu einem bestimmten Zeitpunkt, woraus wiederum die effektiven Beobachtungen resultieren. Es handelt sich somit um ein hierarchisches Modell mit drei Stufen.

Wir interessieren uns nun für den Credibility-Schätzer der individuellen Prämie des Risikos i im nächsten Jahr $j + 1$, d.h. $\widehat{\mu(\Theta_{i,j+1})}$. Wegen der Unabhängigkeit der Δ_{ij} nach Modellannahmen 5.1 gilt jedoch, dass

$$\text{Pro}(\mu(\Theta_{i,j+1}) | L(\mathcal{D}, \mu_0)) = \text{Pro}(\mu(\Theta_i) | L(\mathcal{D}, \mu_0))$$

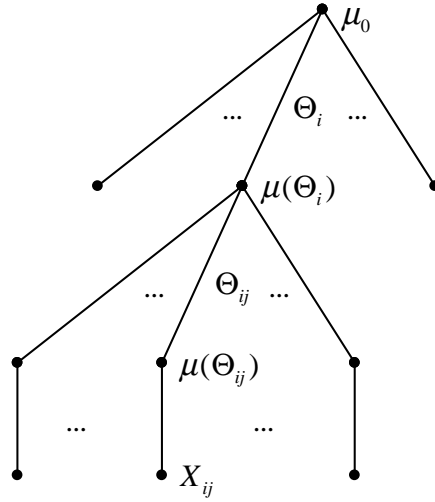


Abbildung 5.3: Zeitinhomogenes Modell als dreistufiges hierarchisches Credibility-Modell

(wobei \mathcal{D} für alle Beobachtungen steht), und wir können stattdessen den Credibility-Schätzer $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ betrachten. Nachfolgend werden die aus den Modellannahmen 5.1 resultierenden Credibility-Schätzer präsentiert, wobei wir aus einem technischen Umstand (der Herleitung aus dem hierarchischen Modell wegen) auch $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}}$ aufführen.

Theorem 5.2 (Credibility-Schätzer im zeitinhomogenen Modell) *Unter den Modellannahmen 5.1 ist der (inhomogene) Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta_{ij})$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}} &= \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} \\ \text{mit } \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} &= \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) \mu_0 \quad (\text{interessierend}), \\ \text{wobei } B_i &= \sum_j \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i\bullet}} X_{ij} \\ \alpha_i &= \frac{\alpha_{i\bullet}}{\alpha_{i\bullet} + \frac{\delta^2}{\tau^2}} \\ \alpha_{ij} &= \frac{w_{ij}}{w_{ij} + \frac{\sigma^2}{\delta^2}} \end{aligned}$$

und $\text{Var}(\mu(\Theta_i)) = \tau^2$, $E[\sigma^2(\Theta_{ij})] = \sigma^2$, $\text{Var}(\Delta_{ij}) = \delta^2$ die Strukturparameter.

Beweis. Die Modellannahmen 5.1 entsprechen wie bereits beschrieben einem hierarchischen Credibility-Modell mit drei Stufen. Bühlmann und Gisler haben in [BG05] bereits Schätzer und Eigenschaften für hierarchische Modelle hergeleitet. Wir verweisen an den entsprechenden Stellen auf deren Ergebnisse.

Nach Definition der Datenbasis $\mathcal{D} = \{X_{ij} : i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, n\}$ für eine Observationsperiode von n Zeitschritten gilt wie gemeinhin bekannt im Hilbertraum \mathcal{L}^2 quadratisch integrierbarer Funktionen für den Credibility-Schätzer

$$\begin{aligned} \widehat{\mu(\Theta_{ij})} &= \text{Pro}(\mu(\Theta_{ij}) \mid L(\mathcal{D}, 1)) \\ &= \text{Pro}(\underbrace{\text{Pro}(\mu(\Theta_{ij}) \mid L(\mathcal{D}, \mu(\Theta_i), 1))}_{=:\widehat{\mu(\Theta_{ij})}'} \mid L(\mathcal{D}, 1)). \end{aligned}$$

Wir postulieren

$$\begin{aligned} \widehat{\mu(\Theta_{ij})}' &= \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \mu(\Theta_i) \\ \text{mit } \alpha_{ij} &= \frac{w_{ij}}{w_{ij} + \frac{\sigma^2}{\delta^2}} \end{aligned}$$

und beweisen:

- i) $\widehat{\mu(\Theta_{ij})}'$ ist Credibility-Schätzer basierend auf X_{ij} und $\mu(\Theta_i)$,
- ii) $\widehat{\mu(\Theta_{ij})}'$ ist Credibility-Schätzer basierend auf \mathcal{D} und $\mu(\Theta_i)$.

Beide Schritte folgen auf entsprechender hierarchischer Stufe aus Lemma 6.2 auf Seite 151 in [BG05]. Mit Theorem 6.5 auf Seite 157 in [BG05] finden wir

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}} = \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \widehat{\mu(\Theta_i)}.$$

Weiter ist

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \text{Pro}(\underbrace{\text{Pro}(\mu(\Theta_i) \mid L(\mathcal{D}, \mu(\Theta_{ij}), 1))}_{=:\widehat{\mu(\Theta_i)}'} \mid L(\mathcal{D}, 1))$$

und mittels Lemma 6.2 in [BG05] wiederum

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}' &= \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) \mu_0 \\ \text{mit } \alpha_i &= \frac{\tau^2}{\tau^2 + E[(\mu(\Theta_{ij}) - X_{ij})^2]}. \end{aligned}$$

Analog führen Theorem 6.4 und Theorem 6.5 ab S. 155 in [BG05] auf

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} &= \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) \mu_0 \\ \text{mit } B_i &= \sum_j \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i\bullet}} X_{ij} \\ \alpha_i &= \frac{\alpha_{i\bullet}}{\alpha_{i\bullet} + \frac{\delta^2}{\tau^2}}. \end{aligned}$$

□

Theorem 5.3 (Homogener Schätzer im zeitinhomogenen Modell) *Unter den Modellannahmen 5.1 ist der homogene Credibility-Schätzer von $\mu(\Theta_{ij})$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}}^{\text{hom}} &= \alpha_{ij}X_{ij} + (1 - \alpha_{ij})\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} \\ \text{mit } \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} &= \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i)\widehat{\widehat{\mu_0}} \quad (\text{interessierend}), \\ \text{wobei } \widehat{\widehat{\mu_0}} &= \sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha_\bullet} B_i, \end{aligned}$$

und $\alpha_i, \alpha_{ij}, B_i$ wie in Theorem 5.2.

Beweis. Analog zum Beweis von Theorem 5.2 und gemäss den Theoremen 6.4 und 6.6 ab Seite 155 in [BG05] auf entsprechender hierarchischer Stufe folgen die aufgeführten Schätzer und Parameter. \square

Im folgenden Kapitel werden einige Eigenschaften der soeben aufgeführten Credibility-Schätzer gezeigt.

5.3 Eigenschaften der Credibility-Schätzer

Wir führen die quadratischen Verluste der Credibility-Schätzer des vorigen Kapitels wie auch die Balance-Eigenschaft des homogenen Schätzers auf und behandeln abschliessend das Verhalten des Modells in Abhängigkeit der inneren und äusseren Varianz der Risiken.

Proposition 5.4 (Quadratischer Verlust des inhomogenen Credibility-Schätzers im zeitinhomogenen Modell) *Der quadratische Verlust des Credibility-Schätzers $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}}$ aus Theorem 5.2 ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} q_{ij} &= E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}} - \mu(\Theta_{ij}) \right)^2 \right] = \delta^2(1 - \alpha_{ij}) + q_i(1 - \alpha_{ij})^2 \\ \text{mit } q_i &= E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \tau^2(1 - \alpha_i). \end{aligned}$$

Beweis. Wir verwenden wiederum auf entsprechender hierarchischer Stufe das Ergebnis aus Theorem 6.8 auf Seite 159 in [BG05] unter Zuhilfenahme der Tatsache, dass

$$E \left[(\mu(\Theta_{ij}) - \mu(\Theta_i))^2 \right] = E[(\Delta_{ij} - 0)^2] = \text{Var}(\Delta_{ij}) = \delta^2.$$

\square

Proposition 5.5 (Quadratischer Verlust des homogenen Schätzers im zeitinhomogenen Modell) *Der quadratische Verlust des homogenen Credibility-*

ty-Schätzers $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}}^{\text{hom}}$ aus Theorem 5.3 ist gegeben durch

$$q_{ij}^{\text{hom}} = E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_{ij}) \right)^2 \right] = \delta^2(1 - \alpha_{ij}) + q_i^{\text{hom}}(1 - \alpha_{ij})^2$$

$$\text{mit } q_i^{\text{hom}} = E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \tau^2(1 - \alpha_i) + q^{\text{hom}}(1 - \alpha_i)^2$$

$$\text{und } q^{\text{hom}} = E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu_0}} - \mu_0 \right)^2 \right] = \frac{\tau^2}{\alpha_\bullet}.$$

Beweis. Analog zum vorherigen Beweis folgt dieses Ergebnis aus Theorem 6.9 auf Seite 160 in [BG05]. \square

Proposition 5.6 (Balance-Eigenschaft des homogenen Credibility-Schätzers im zeitinhomogenen Modell) *Der homogene Credibility-Schätzer für $\mu(\Theta_{ij})$ unter Modellannahmen 5.1 erfüllt die Balance-Eigenschaft, d.h. mittels $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}}^{\text{hom}}$ würde genau eingenommen, was an Schaden anfällt:*

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{ij} \widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}}^{\text{hom}} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{ij} X_{ij}.$$

Beweis. Die Proposition folgt auf unterster hierarchischer Stufe direkt aus Theorem 6.7 auf Seite 158 in [BG05]. \square

Bemerkung 5.7 *Für die höhere hierarchische Stufe ist die Balance-Eigenschaft nicht mehr notwendigerweise gegeben. Beispielsweise gilt im Allgemeinen für den uns interessierenden Credibility-Schätzer*

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{ij} \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} \neq \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{ij} X_{ij}.$$

Wir untersuchen nun noch das Verhalten der Schätzer und quadratischen Verluste in Abhängigkeit der inneren und äusseren Varianz der Risiken.

Die innere Varianz $\sigma^2 = E[\sigma^2(\Theta_{ij})] = w_{ij} E[\text{Var}(X_{ij}|\Theta_{ij})]$ misst dabei die Schwankung der Beobachtung eines gegebenen Risikos in einem Jahr. Strebt sie gegen Null, so wird die individuelle Schadenbeobachtung absolut zuverlässig. Dementsprechend verhalten sich die Schätzer:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{w_{ij}}{w_{ij} + \frac{\sigma^2}{\delta^2}} \longrightarrow 1 \quad \text{für } \sigma^2 \longrightarrow 0, \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}} &= \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} \longrightarrow X_{ij} \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}}^{\text{hom}} &= \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} \longrightarrow X_{ij} \end{aligned}$$

für $\sigma^2 \longrightarrow 0$ ($\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ und $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}}$ sind beschränkt), also gehen die Credibility-Schätzer über in die individuelle Beobachtung.

Steigt im Gegenteil nun σ^2 aber ins Unendliche, so wird jede Aussagekraft der individuellen Beobachtungen des betrachteten Risikos vernichtet und wir erhalten

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \frac{w_{ij}}{w_{ij} + \frac{\sigma^2}{\delta^2}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } \sigma^2 \longrightarrow \infty \\ \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i\bullet}} &= \frac{w_{ij}}{\left(\frac{w_{ij}}{\sigma^2} + \frac{1}{\delta^2}\right) \sum_j \frac{w_{ij}}{\frac{w_{ij}}{\sigma^2} + \frac{1}{\delta^2}}} \longrightarrow \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} \quad \text{für } \sigma^2 \longrightarrow \infty \\ \alpha_i &= \frac{\alpha_{i\bullet}}{\alpha_{i\bullet} + \frac{\delta^2}{\tau^2}} = \frac{\sum_j \frac{w_{ij}}{\frac{w_{ij}}{\sigma^2} + \frac{1}{\delta^2}}}{\sum_j \frac{w_{ij}}{\frac{w_{ij}}{\sigma^2} + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{\sigma^2 \delta^2}{\tau^2}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } \sigma^2 \longrightarrow \infty\end{aligned}$$

mit B_i beschränkt für alle Realisationen der X_{ij} , und also

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} &= \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) \mu_0 \longrightarrow \mu_0 \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}} &= \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} \longrightarrow \mu_0.\end{aligned}$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass der homogene Credibility-Schätzer wertlos wird, da er sich ausschliesslich auf die individuellen Beobachtungen stützt und keinen konstanten Term enthält.

Die äussere Varianz $\tau^2 = \text{Var}(\mu(\Theta_i))$ ist ein Mass für die Variabilität der korrekten Prämieniveaus zwischen den verschiedenen Risiken (wir haben diese Varianz so definiert - der Variabilität der korrekten individuellen Prämien ist noch die Varianz δ^2 hinzuzufügen, d.h.

$$\text{Var}(\mu(\Theta_{ij})) = \text{Var}(\mu(\Theta_i) + \Delta_{ij}) = \tau^2 + \delta^2$$

wegen der Unabhängigkeit von Δ_{ij}). Strebt τ^2 gegen Null, so werden die Prämieniveaus aller Risiken identisch. Die Schätzer verhalten sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{\alpha_{i\bullet}}{\alpha_{i\bullet} + \frac{\delta^2}{\tau^2}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } \tau^2 \longrightarrow 0, \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} &= \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) \mu_0 \longrightarrow \mu_0 \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}} &= \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} \longrightarrow \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \mu_0\end{aligned}$$

(B_i beschränkt) und

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_i}{\alpha_{\bullet}} &= \frac{\alpha_{i\bullet}}{(\tau^2 \alpha_{i\bullet} + \delta^2) \sum_i \frac{\alpha_{i\bullet}}{\tau^2 \alpha_{i\bullet} + \delta^2}} \longrightarrow \frac{\alpha_{i\bullet}}{\alpha_{\bullet\bullet}} \quad \text{für } \tau^2 \longrightarrow 0, \\ \widehat{\widehat{\mu_0}} &= \sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha_{\bullet}} B_i \longrightarrow \sum_i \frac{\alpha_{i\bullet}}{\alpha_{\bullet\bullet}} B_i = \sum_{ij} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{\bullet\bullet}} X_{ij} =: X \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} &= \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) \widehat{\widehat{\mu_0}} \longrightarrow X \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}}^{\text{hom}} &= \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} \longrightarrow \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) X\end{aligned}$$

für $\tau^2 \longrightarrow 0$. Anders formuliert haben wir dadurch die oberste Stufe des hierarchischen Baums 5.3 auf Seite 46 entfernt bzw. die Knoten auf dem zweitobersten Level in der Wurzel zusammengezogen. Wir haben somit eine spezielle Situation

ähnlich Bühlmann-Straub geschaffen: Die I Risiken der n unterschiedlichen Jahre werden isoliert als $I \cdot n$ eigenständige Risiken ohne Zeitkomponente oder aber innerhalb eines einzigen Zeitpunkts angesehen. δ^2 übernimmt die Rolle der äusseren Varianz zwischen den Risiken, σ^2 behält seine Bedeutung. Die betrachtete Risikobeobachtung ist X_{ij} und suffiziente Statistik für sich selbst - der inhomogene und homogene Credibility-Schätzer gehen nach dieser Interpretation in ihre gewohnten Formen im (entarteten) Modell von Bühlmann-Straub (vgl. Theoreme 2.2 und 2.3) über.

Im umgekehrten Fall ($\tau^2 \rightarrow \infty$) schwanken die korrekten individuellen Prämien um Niveaus, die beliebig volatil sind. Eine gemeinschaftliche Auskunft μ_0 über alle Risiken hinweg hat somit kein Gewicht mehr in der Vorhersage für das einzelne Risiko, nur die Information im selben Zweig des hierarchischen Baums gegeben Θ_i (vgl. Abbildung 5.3 auf Seite 46) trägt dazu bei. Wir erhalten aus diesem Grund ausschliesslich homogene Schätzer, oder formal

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{\alpha_{i\bullet}}{\alpha_{i\bullet} + \frac{\delta^2}{\tau^2}} \rightarrow 1 \quad \text{für } \tau^2 \rightarrow \infty, \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} &= \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) \mu_0 \rightarrow B_i \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}} &= \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} \rightarrow \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) B_i\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_i}{\alpha_{\bullet}} &= \frac{\alpha_{i\bullet}}{\left(\alpha_{i\bullet} + \frac{\delta^2}{\tau^2}\right) \sum_i \frac{\alpha_{i\bullet}}{\alpha_{i\bullet} + \frac{\delta^2}{\tau^2}}} \rightarrow \frac{1}{I} \quad \text{für } \tau^2 \rightarrow \infty, \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} &= \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) \widehat{\widehat{\mu_0}} \rightarrow B_i \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}}^{\text{hom}} &= \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} \rightarrow \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) B_i\end{aligned}$$

für $\tau^2 \rightarrow \infty$, wobei $\widehat{\widehat{\mu_0}}$ beschränkt ist für jede Realisation von B_i . Der inhomogene und homogene Credibility-Schätzer gehen somit beide in dieselbe homogene Form über, die sich an eine ähnliche Interpretation wie im Fall $\tau^2 \rightarrow 0$ anlehnt: Wir schränken unsere Sicht in Abbildung 5.3 einzig auf den hierarchischen Zweig des Risikos i ein und denken uns das Risiko in den n unterschiedlichen Jahren als n verschiedene Risiken ohne Zeitkomponente, welche unser Kollektiv bilden. Wieder tritt δ^2 an die Stelle der äusseren Varianz τ^2 und σ^2 behält seine Bedeutung. Ein kollektives Mittel existiert auf dieser Stufe nicht, somit muss es z.B. aus dem Bestand geschätzt werden; und analog ist die betrachtete Risikobeobachtung X_{ij} suffiziente Statistik für sich selbst. Nach diesem Interpretationsschema befinden wir uns wieder im (entarteten) homogenen Fall des Modells von Bühlmann-Straub.

Mit diesen beiden asymptotischen Betrachtungen der äusseren Varianz τ^2 haben wir bereits für das nächste Kapitel vorgegriffen, wo die (sinngemässere) Kompatibilität unseres zeitinhomogenen Modells mit der klassischen Bühlmann-Straub-Situation überprüft wird.

5.4 Kompatibilität zu Bühlmann-Straub

Der elementare Unterschied unseres zeitinhomogenen Modells 5.1 auf Seite 45 zum gemeinhin bekannten Modell von Bühlmann-Straub (Modellannahmen 2.1 auf Seite 9) ist die zusätzliche hierarchische Stufe entstehend durch die Zufallsvariablen Δ_{ij} , welche das Niveau der korrekten individuellen Prämie in der Zeit variieren lassen. Das Ausmass der Schwankung lässt sich modellgemäss über die Varianz $Var(\Delta_{ij}) = \delta^2$ steuern. Lässt man sie gegen Null streben, so müssten das Modell wie auch die Credibility-Schätzer von Bühlmann-Straub mitsamt ihren Eigenschaften resultieren - dies werden wir nachfolgend aufzeigen.

Es gelten

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &\longrightarrow E[\Delta_{ij}] = 0 \quad \text{für} \quad Var(\Delta_{ij}) = \delta^2 \longrightarrow 0, \text{ somit} \\ \mu(\Theta_{ij}) &= \mu(\Theta_i) + \Delta_{ij} \longrightarrow \mu(\Theta_i) \text{ und} \\ Var(\mu(\Theta_{ij})) &= \tau^2 + \delta^2 \longrightarrow \tau^2 = Var(\mu(\Theta_i)) \quad \text{für} \quad \delta^2 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Weiter geht der stochastische Prozess $\underline{\Theta}_i = \{\Theta_{i1}, \Theta_{i2}, \dots, \Theta_{ij}, \dots\}$ über in eine Folge identischer Zufallsvariablen, welche mit Θ_i bezeichnet werden können, und $\underline{\Theta}_i$ kann an den entsprechenden Stellen durch Θ_i ersetzt werden. Punkt *i*) in den Modellannahmen 5.1 verliert seinen Sinn, während die Punkte *ii*) und *iii*) mit obigen Grenzwerten für $\delta^2 \longrightarrow 0$ vollständig in die entsprechenden Punkte im Modell von Bühlmann-Straub übergehen.

Ferner

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{w_{ij}}{w_{ij} + \frac{\sigma^2}{\delta^2}} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \delta^2 \longrightarrow 0, \\ \alpha_i &= \frac{\alpha_{i\bullet}}{\alpha_{i\bullet} + \frac{\delta^2}{\tau^2}} \\ &= \frac{\sum_j \frac{w_{ij}}{\delta^2 w_{ij} + \sigma^2}}{\left(\sum_j \frac{w_{ij}}{\delta^2 w_{ij} + \sigma^2}\right) + \frac{1}{\tau^2}} \\ &\longrightarrow \frac{\frac{w_{i\bullet}}{\sigma^2}}{\frac{w_{i\bullet}}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} = \frac{w_{i\bullet}}{w_{i\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \\ &= \alpha_i^{\text{BS}} \quad \text{für} \quad \delta^2 \longrightarrow 0, \\ \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i\bullet}} &= \frac{w_{ij}}{\left(w_{ij} + \frac{\sigma^2}{\delta^2}\right) \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{ij} + \frac{\sigma^2}{\delta^2}}} \\ &= \frac{w_{ij}}{\left(\delta^2 w_{ij} + \sigma^2\right) \sum_j \frac{w_{ij}}{\delta^2 w_{ij} + \sigma^2}} \\ &\longrightarrow \frac{w_{ij}}{\sigma^2 \frac{w_{i\bullet}}{\sigma^2}} = \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} \quad \text{für} \quad \delta^2 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Des Weiteren

$$\begin{aligned} B_i &= \sum_j \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i\bullet}} X_{ij} \longrightarrow \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} X_{ij} = X_i^{\text{BS}} \quad \text{für} \quad \delta^2 \longrightarrow 0 \text{ und} \\ \widehat{\mu}_0 &= \sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha_{i\bullet}} B_i \longrightarrow \sum_i \frac{\alpha_i^{\text{BS}}}{\alpha_{i\bullet}^{\text{BS}}} X_i^{\text{BS}} = \widehat{\mu}_0^{\text{BS}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also das erwartete Resultat, dass das komplette zeitinhomogene Credibility-Modell mitsamt Credibility-Schätzern und Eigenschaften vollständig in Bühlmann-Straub übergeht, falls $\text{Var}(\Delta_{ij}) = \delta^2 \rightarrow 0$. Formal gilt für $\delta^2 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} &= \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) \mu_0 \rightarrow \alpha_i^{\text{BS}} X_i^{\text{BS}} + (1 - \alpha_i^{\text{BS}}) \mu_0 = \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{BS}} \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}} &= \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} \rightarrow \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{BS}} \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} &= \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) \widehat{\widehat{\mu_0}} \rightarrow \alpha_i^{\text{BS}} X_i^{\text{BS}} + (1 - \alpha_i^{\text{BS}}) \widehat{\widehat{\mu_0}}^{\text{BS}} = \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom,BS}} \\ \widehat{\widehat{\mu(\Theta_{ij})}}^{\text{hom}} &= \alpha_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} \rightarrow \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom,BS}} \end{aligned}$$

Darüber hinaus folgt für $\delta^2 \rightarrow 0$ natürlich ebenfalls

$$\begin{aligned} q_i &= \tau^2(1 - \alpha_i) \rightarrow \tau^2(1 - \alpha_i^{\text{BS}}) = q_i^{\text{BS}} \\ q_{ij} &= \delta^2(1 - \alpha_{ij}) + q_i(1 - \alpha_{ij})^2 \rightarrow q_i^{\text{BS}} \\ q^{\text{hom}} &= \frac{\tau^2}{\alpha_\bullet} \rightarrow \frac{\tau^2}{\alpha_\bullet^{\text{BS}}} = q^{\text{hom,BS}} \\ q_i^{\text{hom}} &= \tau^2(1 - \alpha_i) + q^{\text{hom}}(1 - \alpha_i)^2 \rightarrow q_i^{\text{hom,BS}} \\ q_{ij}^{\text{hom}} &= \delta^2(1 - \alpha_{ij}) + q_i^{\text{hom}}(1 - \alpha_{ij})^2 \rightarrow q_i^{\text{hom,BS}}, \end{aligned}$$

und der Beweis ist erbracht.

5.5 Alternative Strukturparameterschätzung

Dieses Kapitel ist der Problematik der Strukturparameter-Schätzung in einem hierarchischen Modell gewidmet, in welchem zur Anwendung klassischer statistischer Schätzverfahren zu wenig Daten zur Verfügung stehen. Wir stellen Überlegungen an, das Schätzproblem mittels Regression zu lösen und leiten nach einer kurzen Umschreibung des Problems ein ausführliches Verfahren her.

5.5.1 Motivation

Der Einsatz eines jeden Credibility-Modells in der Praxis erfordert in irgend einer Form die Schätzung der auftretenden Strukturparameter, sei dies nach dem Bayes'schen Ansatz anhand der Prognose eines erfahrenen Aktuars oder gemäß statistischer Methoden aus einem ausreichend grossen Bestand heraus, über dessen Beobachtung man während einer gewissen Observationsspanne verfügt.

In klassischen hierarchischen Modellen (zu welchen das zweistufige hierarchische Modell von Bühlmann-Straub gehört) gibt es unterschiedliche Ansätze zur Schätzung der Varianzen auf jeder hierarchischen Stufe - sie stützen sich jedoch meist auf eine Mehrzahl von Beobachtungen pro Knotenpunkt der entsprechenden Stufe. Hier stossen wir mit unserem zeitinhomogenen Modell auf ein Problem: möchte man auf unterster Stufe die erwartete Varianz $\sigma^2 = E[\sigma^2(\Theta_{ij})]$ innerhalb eines Risikos und eines bestimmten Jahres schätzen, so steht uns entgegen der üblichen Situation nur eine einzige Observation auf diesem Ast zur Verfügung - nämlich X_{ij} . Jedes X_{ik} , $k \neq j$ desselben Risikos in einem anderen Jahr

entspringt dem Modell nach einem abweichenden individuellen Prämienniveau und kann somit im klassischen Sinn nicht gemeinsam mit X_{ij} zur Schätzung einer Varianz genutzt werden (und die verschiedenen Risiken sind nach Annahme unabhängig voneinander). Wir stehen also vor dem Problem, aus einer einzigen Beobachtung eine Varianz zu schätzen, was nicht möglich ist.

An dieser Stelle bringen wir die Idee ein, das Problem der Schätzung der nötigen Strukturparameter mittels Regression zu lösen. Wir leiten ein auf Regression basierendes Schätzverfahren her und verdeutlichen auf diesem Weg, was darunter zu verstehen ist.

5.5.2 Strukturparameterschätzung mittels Regression

Klassischer Schätzer

Wir bewegen uns im Rahmen der Modellannahmen 5.1 auf Seite 45. Da auf unterster hierarchischer Stufe je übergeordneten Knoten $\mu(\Theta_{ij})$ (gegeben Θ_{ij}) nur eine einzige Beobachtung X_{ij} vorliegt, betrachten wir eine hierarchische Stufe höher - also die Beobachtungen $\{X_{ij} : j = 1, \dots, n\}$ unterhalb des Knotens $\mu(\Theta_i)$ (gegeben Θ_i , vergleiche hierzu mit Abbildung 5.3 auf Seite 46). Auf diesem Level ist die interessierende Abweichung desselben Risikos, aber zwischen den verschiedenen Beobachtungsjahren, die Varianz $\delta^2(\Theta_i) := \text{Var}(\Delta_{ij}|\Theta_i)$, wie aus dem Zusammenhang $\mu(\Theta_{ij}) = \mu(\Theta_i) + \Delta_{ij}$ aus den Modellannahmen ersichtlich ist. Wir betrachten wie auf zweitunterster hierarchischer Stufe üblich (vgl. beispielsweise den Varianz-Schätzer für τ^2 in Bühlmann-Straub) den Schätzer

$$D_i = \frac{n}{n-1} \sum_{j=1}^n \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} (X_{ij} - X_i)^2 \quad (5.1)$$

mit $X_i = \sum_{j=1}^n \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} X_{ij}$.

Wir zeigen zunächst

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{ij}|\Theta_i) &= E[\text{Var}(X_{ij}|\Theta_i, \Theta_{ij})|\Theta_i] + \text{Var}(E[X_{ij}|\Theta_i, \Theta_{ij}]|\Theta_i) \\ &= E[\text{Var}(X_{ij}|\Theta_{ij})|\Theta_i] + \text{Var}(E[X_{ij}|\Theta_{ij}]|\Theta_i) \\ &= E\left[\frac{\sigma^2(\Theta_{ij})}{w_{ij}} \middle| \Theta_i\right] + \text{Var}(\mu(\Theta_i) + \Delta_{ij}|\Theta_i) \\ &= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{ij}} + \delta^2(\Theta_i), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Unabhängigkeit von $\mu(\Theta_i)$ und Δ_{ij} verwendet haben (d.h. der Mischterm verschwindet). Wir berechnen nun weiter die bedingte Erwartung

$$\begin{aligned} E[D_i|\Theta_i] &= \frac{n}{n-1} \sum_{j=1}^n \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} E\left[\left((X_{ij} - \mu_0) - (X_i - \mu_0)\right)^2 \middle| \Theta_i\right] \\ &= \frac{n}{n-1} \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} \left\{ \text{Var}(X_{ij}|\Theta_i) - 2 \sum_k \frac{w_{ik}}{w_{i\bullet}} \text{Cov}(X_{ij}, X_{ik}|\Theta_i) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +Var\left(\sum_k \frac{w_{ik}}{w_{i\bullet}} X_{ik} \middle| \Theta_i\right) \Big\} \\
= & \frac{n}{n-1} \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} \left\{ \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{ij}} + \delta^2(\Theta_i) - 2 \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} \left(\frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{ij}} + \delta^2(\Theta_i) \right) \right. \quad (5.2) \\
& \left. + \sum_k \frac{w_{ik}^2}{w_{i\bullet}^2} \left(\frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{ik}} + \delta^2(\Theta_i) \right) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \frac{w_{ik} w_{il}}{w_{i\bullet}^2} Cov(X_{ik}, X_{il} | \Theta_i) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \delta^2(\Theta_i) \frac{n}{n-1} \left\{ \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} - 2 \sum_j \frac{w_{ij}^2}{w_{i\bullet}^2} + \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} \sum_k \frac{w_{ik}^2}{w_{i\bullet}^2} \right\} \quad (5.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma^2(\Theta_i) \frac{n}{n-1} \left\{ \sum_j \frac{1}{w_{i\bullet}} - 2 \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}^2} + \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} \sum_k \frac{w_{ik}}{w_{i\bullet}^2} \right\} \\
= & \delta^2(\Theta_i) \frac{n}{n-1} \left\{ 1 - 2 \sum_j \frac{w_{ij}^2}{w_{i\bullet}^2} + 1 \cdot \sum_k \frac{w_{ik}^2}{w_{i\bullet}^2} \right\} \\
& + \sigma^2(\Theta_i) \frac{n}{n-1} \left\{ \frac{n}{w_{i\bullet}} - 2 \frac{1}{w_{i\bullet}} + 1 \cdot \frac{1}{w_{i\bullet}} \right\} \\
= & \delta^2(\Theta_i) \frac{n}{n-1} \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} \left(1 - \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} \right) + \sigma^2(\Theta_i) \frac{n}{w_{i\bullet}} \\
= & \frac{\delta^2(\Theta_i)}{c_i} + \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\frac{w_{i\bullet}}{n}} \quad (5.4)
\end{aligned}$$

wobei wir in (5.2) und (5.3) die bedingte Unabhängigkeit der $(X_{ij})_j$ verwendet haben und in (5.4)

$$c_i := \frac{n-1}{n} \left\{ \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} \left(1 - \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} \right) \right\}^{-1} \quad (5.5)$$

definieren. Eine biasfreie Schätzung von $\delta^2(\Theta_i)$ hätte somit zu erfolgen durch

$$\widehat{\delta^2(\Theta_i)} = c_i \cdot \left\{ D_i - \frac{n \cdot \widehat{\sigma^2(\Theta_i)}}{w_{i\bullet}} \right\} \quad (5.6)$$

respektive (da dieser Ausdruck negativ werden kann)

$$\widehat{\delta^2(\Theta_i)} = \max \left\{ \widehat{\delta^2(\Theta_i)}, 0 \right\}.$$

Ein möglicher Ansatz für die Schätzung des Strukturparameters δ^2 wäre dann, das arithmetische Mittel zu verwenden (eine allgemein bessere Methode ist unseres Wissens nicht bekannt), d.h.

$$\widehat{\delta^2} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \widehat{\delta^2(\Theta_i)}.$$

Wie in (5.6) ersichtlich, erfordert diese Methode der Schätzung von δ^2 die Kenntnis von Schätzern für $\sigma^2(\Theta_i)$, über welche wir wie bereits erläutert nicht verfügen. Es bedarf also eines anderen Ansatzes, um dennoch eine Varianzschätzung vornehmen zu können, und unser Ansatz ist eine *lineare Regression*.

Lineare Regression

In (5.4) haben wir gezeigt, dass

$$E[D_i|\Theta_i] = \frac{\delta^2(\Theta_i)}{c_i} + \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\frac{w_{i\bullet}}{n}}$$

gilt, was äquivalent ist zu

$$w_{i\bullet}E[D_i|\Theta_i] = \underbrace{[\delta^2(\Theta_i)]}_{=:a_i} \cdot \frac{w_{i\bullet}}{c_i} + \underbrace{[n \cdot \sigma^2(\Theta_i)]}_{=:b_i}.$$

Wir betrachten also über alle Risiken hinweg die Punktwolke (x_i, y_i) mit

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{w_{i\bullet}}{c_i} = \frac{n}{n-1} \sum_j w_{ij} \left(1 - \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}}\right) \\ y_i &= w_{i\bullet}D_i, \end{aligned}$$

wobei c_i gegeben ist durch (5.5) und D_i durch (5.1). An dieser Stelle fordern wir indirekt

$$y_i = w_{i\bullet}D_i \approx E[y_i] + \varepsilon_i$$

mit $E[\varepsilon_i] = 0$, und für eine ungewichtete Regression ist es nötig, dass $Var(\varepsilon_i)$ unabhängig wird vom betrachteten Risiko i . Diese Varianz kann nicht exakt berechnet werden - grobe Überlegungen zeigen jedoch, dass im Falle normalverteilter X_{ij} (bedingt, gegeben Θ_i) eine Varianz unabhängig von $w_{i\bullet}$ resultiert für τ^2 klein gegenüber σ^2 . Eine ungewichtete Regression ist damit vertretbar.

Wir legen nun eine Regressionsgerade

$$y = \hat{a} \cdot x + \hat{b}$$

durch besagte Punktwolke und minimieren die quadratischen Abweichungen der Punkte zu ihrem entsprechenden Wert auf der Gerade, was bekanntermassen auf die Parameter

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2} \\ \hat{b} &= \bar{y} - \hat{a} \cdot \bar{x} \end{aligned}$$

führt. Illustriert könnte dies etwa die Abbildung 5.4 ergeben.

Weil die lineare Regression über alle Risiken hinweg geschieht, erhalten wir aus den Regressionsparametern sogleich Schätzer für die Strukturparameter σ^2 und δ^2 , nämlich

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma^2} &= \max \left\{ \frac{\hat{b}}{n}, 0 \right\} \\ \widehat{\delta^2} &= \max \{ \hat{a}, 0 \}. \end{aligned}$$

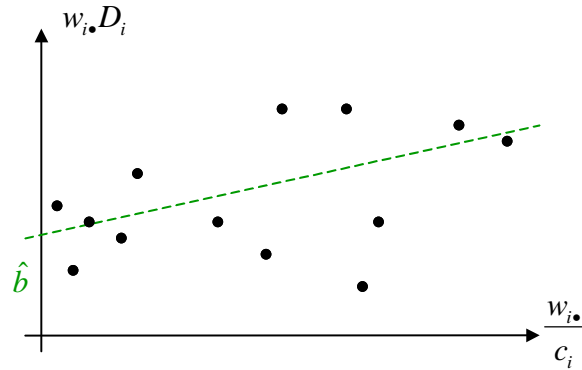


Abbildung 5.4: Lineare Regression zur Schätzung der Strukturparameter

An dieser Stelle ist anzumerken, dass diese Schätzer nicht blind verwendet werden sollten. Je nach Erscheinungsbild der beschriebenen Punktwolke und Güte der Regression ist möglicherweise die Steigung der Regressionsgerade unbrauchbar oder gar auch der Achsenabschnitt der erklärten Variablen zu wenig aussagekräftig. Meist liefert letzterer eine stabilere Schätzung als die Steigung, und wir erhalten immerhin $\widehat{\sigma^2}$. Verwenden wir diese Schätzung an Stelle von $\widehat{\sigma^2}(\Theta_i)$ in (5.6), so erhalten wir alternativ

$$\begin{aligned}\widehat{\delta^2}(\Theta_i)' &= c_i \cdot \left\{ D_i - \frac{n \cdot \widehat{\sigma^2}}{w_{i\bullet}} \right\} \\ \widehat{\delta^2}(\Theta_i)' &= \max \left\{ \widehat{\delta^2}(\Theta_i)', 0 \right\} \\ \widehat{\delta^2}' &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \widehat{\delta^2}(\Theta_i)'\end{aligned}$$

Es fehlt nun noch der Schätzer für den dritten Strukturparameter τ^2 . Wir verfahren analog zur klassischen Schätzung von τ_2^2 auf dritter Stufe im hierarchischen Modell (beispielsweise auf Seite 163 in [BG05]) angepasst auf unsere Situation und erhalten

$$\begin{aligned}\widehat{\tau^2} &= d \cdot \left\{ \frac{I}{I-1} \sum_{i=1}^I \frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} (X_i - \bar{X})^2 - \frac{I \cdot \widehat{\delta^2}}{w_{\bullet\bullet}} \right\}, \\ \text{wobei } d &= \frac{I-1}{I} \left\{ \sum_{i=1}^I \frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \left(1 - \frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \right) \right\}^{-1} \\ \bar{X} &= \sum_{i=1}^I \frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} X_i,\end{aligned}$$

respektive als endgültigen Schätzer, welcher nicht mehr notwendigerweise biasfrei

ist,

$$\widehat{\tau}^2 = \max \left\{ \widehat{\tau}^2, 0 \right\}.$$

Wir haben somit ein mögliches Verfahren zur Schätzung der Strukturparameter σ^2 , δ^2 und τ^2 aufgezeigt. Als Praxisbeispiel des Regressionsverfahrens in der Anwendung auf einen realen Datenbestand verweisen wir auf Kapitel 7.5 und führen dort die Differenz zum Schätzer nach klassischem Verfahren auf.

Teil III
Praktischer Teil

Kapitel 6

Die vorliegende Situation

Ein Kollektiv-Lebensversicherer deckt mit seinen Versicherungsleistungen für die berufstätige Bevölkerung die Risiken Erleben, Invalidität und Tod ab. Im Rahmen dieser Arbeit beschränken wir uns auf das Risiko Invalidität.

Wir beschreiben die grundlegende Vorgehensweise in der Tarifierung von Risiken im Kollektiv-Leben-Geschäft und führen aus, in welcher Weise ein Credibility-Modell in dieses Gefüge eingebracht werden kann. Im letzten Abschnitt werden schliesslich auftretende Störeffekte und ein Lösungsvorschlag besprochen.

6.1 Standardtarif und risikogerechtes Pricing im Kollektiv-Leben

Risikogerechte Tarifierung läuft in zwei Schritten ab. Der Standardtarif legt zunächst das Standard-Prämienniveau für ein zu tarifierendes Kollektiv fest. Er ist so festgelegt, dass das Risiko über den Gesamtbestand abgedeckt wird. In Abhängigkeit vom Risikoverlauf innerhalb eines bestimmten Beobachtungszeitraums wird in einem zweiten Schritt ein Faktor bestimmt, der auf die Prämie gemäss Standardtarif (die sogenannte 100%-Prämie) angewandt wird. Das Produkt entspricht der Risikoprämie, welche dem Kunden verrechnet wird.

6.1.1 Standardtarif

Der Standardtarif repräsentiert die Pricing-Grundlage eines Kollektiv-Lebensversicherers. Als Regelwerk mit Formelsammlungen und Anwendungsvorschriften bildet der Standardtarif die Basis für die Preisgestaltung. Das Standard-Prämienniveau widerspiegelt die über den Gesamtbestand benötigte Prämie, um das versicherte Risiko abzudecken. Es ist Ausgangspunkt für das risikogerechte Pricing, welches das Standardniveau anhand der individuellen Risikocharakteristik und a priori-Kenntnis über die Risiken differenziert.

Diese 100%-Prämie nach Standardtarif wird für ein zu tarifierendes Kollektiv aufgrund biometrischer Grundlagen festgesetzt. So fließen beispielsweise die Alters- und Geschlechtsstruktur des Kollektivs ein, aber auch die Wartefrist, das Schlussalter, die Deckung und die Wahrscheinlichkeit, aus dem Invalidenbestand auszuschneiden (infolge Tod oder Reaktivierung). Statistische Grundlage

können unternehmenseigene oder auch Gemeinschaftsstatistiken sein (z.B. SVV-Statistik).

6.1.2 Risikogerechter Ab- und Aufschlag

Wenn ein Versicherer das Standard-Prämienniveau in dem Sinne differenziert, dass 'gute Risiken' tiefer und 'schlechte Risiken' höher tarifiert werden, so müssen die anderen nachziehen. Versicherer, welche eine solche Risikodifferenzierung nicht vornehmen, müssten nämlich damit rechnen, Kollektive mit gutem Risikoverlauf zu verlieren und solche mit schlechtem Verlauf anzuziehen. Die Folge wäre eine Verschlechterung des Versichertenbestandes.

Durch Beobachtung des individuellen Schadenverlaufs eines Risikos werden Rückschlüsse auf dessen Risikocharakteristik gezogen. Daraus bestimmt man einen risikogerechten Auf- oder Abschlag auf das Standard-Prämienniveau und erhält so die Risikoprämie für das betrachtete Kollektiv. Zu beachten ist hierbei, dass im Durchschnitt wieder die benötigte 100%-Prämie eingenommen werden muss, um das Risiko ausreichend zu decken. Des Weiteren sind aufsichtsrechtliche Restriktionen des Bundesamts für Privatversicherungen einzuhalten.

6.1.3 Vorkonditionierung mittels Risikoklassen

Steht im Neugeschäft für ein zu tarifierendes Kollektiv noch keine Risikobeobachtung zur Verfügung, so muss ohne Vorkonditionierung die 100%-Prämie nach Standardtarif verrechnet werden. Erst mit der Zeit und mit vorhandenen Beobachtungen passt sich die Risikoprämie der individuellen Risikocharakteristik an. Ein kleines Kollektiv aus der IT-Branche würde damit anfangs zu hoch tarifiert werden, während eine kleine Bauunternehmung eine zu tiefe Prämie bezahlen würde. Hinsichtlich Neugeschäft ist der Versicherer auf dem Markt somit nur eingeschränkt konkurrenzfähig.

Oft sind a priori Unterschiede zwischen den Risiken bekannt, die eine Vorab-Einteilung in Risikoklassen motivieren. Jeder dieser Klassen kann ein a priori Auf- oder Abschlag auf das Standard-Prämienniveau zugewiesen werden, der Ausgangslage für die individuelle Tarifierung der Kollektive ist. Es ist hierbei sinnvoll, eine Risikoklasse mit 100%-Niveau zu schaffen, der Risiken oder ganze Klassen von Risiken zugeordnet werden können, über die man a priori nichts weiss.

Sachverständige nehmen in der Praxis eine solche Risikoklasseneinteilung basierend auf statistischen Daten anhand der Branche einer Unternehmung vor. Der sogenannte NOGA-Code (Nomenclature Générale des Activités économiques) ist eine allgemeine Systematik der Tätigkeitsgebiete von Unternehmungen und wird durch das BfS (Bundesamt für Statistik) definiert. Man bildet beispielsweise drei Risikoklassen und weiss aus Erfahrung oder Beobachtung, welche NOGA-Codes welcher Risikoklasse zuzuordnen sind. Nach dieser Zuordnung können die jeweiligen a priori Klassenniveaus z.B. aus dem Bestand geschätzt werden.

Die Vorkonditionierung mittels Risikoklassen hat weitere Vorteile. Eine Risikoklasse erfüllt eher die Homogenitätsanforderungen eines Credibility-Modells (siehe Kapitel 1) an die verschiedenen Risiken. Zudem erlauben uns Risikoklassen vertretbare Annahmen in den nachfolgenden Kapiteln.

6.2 Credibility im risikogerechten Pricing

6.2.1 Motivation

Zweck unserer Credibility-Schätzer ist die Bestimmung eines risikogerechten Faktors zur Definition eines risikogerechten Auf- bzw. Abschlags (vgl. Kapitel 6.1.2). Das verwendete Credibility-Modell hat also nicht wie in klassischen Anwendungen die Schätzung der Risikoprämie selbst zum Ziel, sondern soll ein Risiko anhand seiner individuellen Risikocharakteristik relativ zur zugehörigen Risikoklasse (oder zum Gesamtbestand) qualifizieren.

Ein solches *relatives* Credibility-Modell setzt die Beobachtungen eines zu tarifierenden Kollektivs ins Verhältnis zum erwarteten Wert für dieses Risiko aufgrund der zugehörigen Risikoklasse. Hierbei treffen wir die folgende Annahme:

Annahme 6.1 (bekannte a priori-Unterschiede) *Die a priori-Unterschiede zwischen den Risikoklassen sind genau bekannt, ebenso die prozentualen Standard-Niveaus der Risikoklassen. Die erwartete Beobachtung für ein zu tarifierendes Kollektiv kann aus der zugehörigen Risikoklasse heraus zuverlässig geschätzt werden und wird ebenfalls als bekannt vorausgesetzt.*

Da Credibility-Schätzer symmetrisch tarifieren und linear sind, können verschiedene Schätzer in einer Linearkombination zu einem neuen Schätzer vereint werden unter Beibehaltung gemeinsamer Eigenschaften.

6.2.2 Inhomogene Schadenbeobachtung

Grundlage für das risikogerechte Pricing ist der individuelle Risikoverlauf des zu tarifierenden Kollektivs innerhalb eines Beobachtungszeitraums. Hinsichtlich des Risikos Invalidität treten in der Schadenbeobachtung systematisch Störeffekte auf, die eine korrekte Tarifierung erschweren - die Beobachtungen sind *inhomogen in der Zeit*. Wir beschreiben nachfolgend die zwei einflussreichsten Effekte und stellen im nächsten Kapitel 6.2.3 eine mögliche Lösung vor.

Spätschaden-Problematik

Im Kollektiv-Lebengeschäft sind Spätschäden (auch IBNR¹-Schäden genannt) von grosser Bedeutung. Der IBNR-Effekt umschreibt die Tatsache, dass bereits Schadenfälle eingetreten sein können, die dem Versicherer noch nicht bekannt sind. Grund für den zeitlichen Verzug ist die Zuordnung der Schäden zum effektiven Schadenjahr, also zum Jahr der *Entstehung* des Schadens und nicht zum Jahr seiner *Meldung* an den Versicherer.

Der IBNR-Effekt hat zur Folge, dass die Risikobeobachtung der näheren Vergangenheit systematisch zu tief liegt. Die Zeitperiode, bis 99% der bereits eingetretenen Fälle eines Jahres bekannt sind, umfasst beim Risiko Invalidität in der Kollektiv-Lebensversicherung etwa sechs Jahre. Eine weitere Annahme, die in der Praxis weitestgehend erfüllt ist, erlaubt einen einfachen Ansatz zur Bereinigung der Spätschaden-Problematik:

Annahme 6.2 (Homogenität des IBNR-Effekts) *Der IBNR-Effekt hat in einem betrachteten Jahr in Erwartung auf alle Risiken einer Risikoklasse dieselbe prozentuale Auswirkung hinsichtlich Invalidisierung.*

¹Incurred but not reported

Die Annahme impliziert, dass die aus der Risikoklasse geschätzte a priori erwartete Beobachtung gemäss Kapitel 6.2.1 gleichermassen vom IBNR-Effekt betroffen ist wie die individuelle Beobachtung selbst. Durch die Relativbetrachtung wird dann wie in Kapitel 6.2.3 beschrieben die Spätschaden-Problematik eliminiert.

Konjunkturzyklen

Die allgemeine konjunkturelle Lage verändert sich in sogenannten Konjunkturzyklen (vgl. Abbildung 6.1) und nimmt signifikant auf die Schadenentwicklung der versicherten Kollektive Einfluss. Um das Jahr 2002 herum befand sich das BIP der Schweiz auf einem Tiefstand. Gleichzeitig hat sich in den Jahren 2001-2002 ein genereller Anstieg der Invalidisierung ereignet, aber bereits im Jahr danach war die mittlere Anzahl Schadenfälle wieder leicht rückläufig.

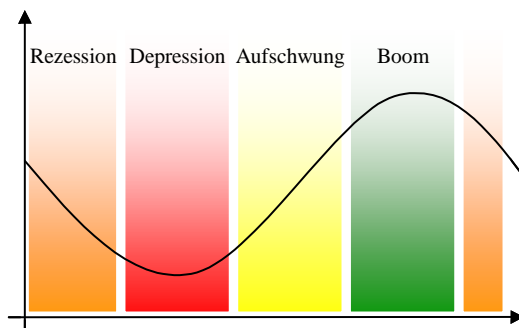


Abbildung 6.1: Theoretischer Konjunkturverlauf

Der Tatbestand z.B. vieler Schadenfälle in einer ökonomischen Depression ist also nur zum Teil auf die eigene Risikocharakteristik eines Kollektivs zurückzuführen. Die in einem Credibility-Modell übliche Annahme, dass die Risikobeobachtungen verschiedener Risiken unabhängig sind, ist damit nicht realitätsgetreu. Es ist also sinnvoll, die Risikoentwicklung eines Versicherungsnehmers relativ zu jener der anderen Versicherten und damit auch relativ zum konjunkturellen Niveau zu betrachten statt absolut.

Wir treffen nachfolgend eine Annahme basierend auf der Überlegung, dass sich Konjunkturzyklen in ähnlichem Masse auf Unternehmungen desselben Wirtschaftszweigs auswirken. In ihrer Risikocharakteristik ähnliche Kollektive sind zudem in einer Risikoklasse gruppiert.

Annahme 6.3 (Homogenität des Einflusses von Konjunkturzyklen) *Konjunkturzyklen haben für das betrachtete Schadenjahr in Erwartung auf alle Risiken einer Risikoklasse dieselbe prozentuale Auswirkung hinsichtlich Invalidisierung.*

Die Annahme impliziert, dass die aus der Risikoklasse geschätzte a priori erwartete Beobachtung gemäss Kapitel 6.2.1 gleichermassen durch die konjunkturelle Lage betroffen ist wie die individuelle Beobachtung selbst. Durch die Relativbetrachtung werden dann, wie in Kapitel 6.2.3 beschrieben, konjunkturelle Effekte eliminiert.

6.2.3 Elimination der Zeitinhomogenität

Im vorangehenden Kapitel 6.2.2 haben wir gesehen, dass die absoluten Risiko-
beobachtungen der Kollektive innerhalb des Beobachtungszeitraums inhomogen
in der Zeit sind. Zur Bereinigung dieser Effekte treffen wir eine grundlegende
Annahme, welche für alle Credibility-Modelle in Kapitel 7 Gültigkeit hat. Sie
impliziert die Annahmen 6.2 und 6.3.

Annahme 6.4 (Inhomogenität in der Zeit) *In bedingter Erwartung, gegeben
die individuelle Risikocharakteristik, ist der zeitinhomogene Effekt bei allen Risi-
ken einer Risikoklasse gleich. Der prozentuale Einfluss kann aus der Risikoklasse
heraus zuverlässig geschätzt und als bekannt angenommen werden.*

Formal bedeutet dies, dass wir für eine (absolute) Schadenbeobachtung X_{ij}
(z.B. die Anzahl Invaliditätsfälle oder die Schadenssumme) den Zusammenhang

$$E[X_{ij}|\Theta_i] = d_j \cdot \mu(\Theta_i)$$

voraussetzen, wobei d_j innerhalb derselben Risikoklasse konstant und bekannt
ist. Für die a priori erwartete Beobachtung eines Risikos aus Annahme 6.1 gilt
ebenso

$$\mu_{ij} = d_j \cdot \mu'_{ij},$$

wobei μ_{ij} die 'beobachtete' Erwartung und μ'_{ij} die um zeitinhomogene Effekte
bereinigte Erwartung darstellen. Es folgt damit

$$E[R_{ij}|\Theta_i] = \frac{d_j \cdot \mu(\Theta_i)}{d_j \cdot \mu'_{ij}} = \frac{\mu(\Theta_i)}{\mu'_{ij}}$$

für $R_{ij} = \frac{X_{ij}}{\mu_{ij}}$, und wir erhalten durch die Relativbetrachtung einen um zeitin-
homogene Effekte bereinigten Beobachtungsvektor $\underline{R}_i^T = (R_{i1}, \dots, R_{in})$.

Ein alternativer Weg, solche zyklischen Verläufe zu modellieren, sind evolu-
tionäre Credibility-Modelle. Wir haben im theoretischen Teil in Kapitel 5 auf
Seite 43 ein solches vorgestellt.

Kapitel 7

Praktischer Einsatz von Credibility

Unsere konkreten Berechnungen in diesem Kapitel basieren auf einem Teilbestand eines Lebensversicherers. Im Rahmen einer Vorkonditionierung verwenden wir drei Risikoklassen ('gute', 'mittlere' und 'schlechte' Risiken) mit den prozentualen Standard-Niveaus 80%, 100% und 120%. Der Beobachtungszeitraum umfasst sechs Schadenjahre. Wir verwenden die in der Versicherungspraxis verbreitete Software SAS. Der zugehörige Programmcode befindet sich am Ende des Dokuments in Teil IV. Im Folgenden stellen wir mehrere Modelle vor und illustrieren ihre Resultate.

Im letzten Unterkapitel führen wir ausserdem exemplarisch und zum Vergleich die konkrete Berechnung von Strukturparameterschätzern mittels Regression durch, wie sie in Kapitel 5.5.2 beschrieben worden ist.

7.1 Invalidenquoten-Modell

Unser erstes Credibility-Modell wird in Kapitel 7.1.1 motiviert, gefolgt von den formalen Modellannahmen und ihrer Erklärung (Kapitel 7.1.2). Schliesslich werden in Kapitel 7.1.3 die Resultate kommentiert.

Wir merken an dieser Stelle an, dass wir in Kapitel 8 beschreiben, wie man das Invalidenquoten-Modell aufgrund von a priori-Kenntnis über systematische Unterschiede in den Schadenbeobachtungen noch verbessern kann.

7.1.1 Motivation

Schon F. Bichsel hielt Ende der sechziger Jahre fest, dass sich im Rahmen eines Bonus/Malus-Systems (der Motorfahrzeug-Haftpflicht) aus der Schadenhäufigkeit eines Versicherten am ehesten Rückschlüsse auf dessen Risikocharakteristik ziehen lassen, während die jeweilige Schadenhöhe aufgrund ihrer grossen Volatilität geringere Aussagekraft besitzt.

Unsere erste Idee ist demnach, eine Tarifierung anhand der beobachteten Anzahl Invaliditätsfälle vorzunehmen. Da wir aber die zu tarifierenden Kollektive relativ zueinander vergleichen wollen und ein grösseres Kollektiv im Mittel mehr

Schadenfälle produziert, betrachten wir die jeweilige Invalidenquote q_{ij}^{inv} des Risikos i im Jahr j mit

$$q_{ij}^{inv} := \frac{X_{ij}}{vt_{ij}},$$

wobei

- X_{ij} Anzahl beobachtete Invalide des Risikos i im Schadenjahr j
 vt_{ij} Anzahl aktive Versicherte des Risikos i im Schadenjahr j .

7.1.2 Formales Modell

Wir führen zunächst für die Risiken $i \in \{1, \dots, I\}$ der drei Risikoklassen im Beobachtungszeitraum $j \in \{1, \dots, n\}$ (aktuell die Schadenjahre 2001-2006) die folgenden Bezeichnungen ein:

- X_{ij} Anzahl beobachtete Invalide des Risikos i im Jahr j
 vt_{ij} Anzahl aktive Versicherte des Risikos i im Jahr j
 $r(i)$ Risikoklasse, welcher das Risiko i angehört
 f_{ij} durchschnittliche Invalidenquote der Risikoklasse $r(i)$ im Jahr j
 μ_{ij} a priori erwartete Anzahl Invalide des Risikos i im Jahr j
 w_{ij} Volumenmass des Risikos i im Jahr j
 \underline{R}_i Beobachtungsvektor des Risikos i im Observationszeitraum
 R_{ij} Komponente des Jahres j im Beobachtungsvektor \underline{R}_i

Hierbei ist zu beachten, dass wir für die Berechnungen gedanklich einen Betrachtungszeitpunkt fixieren müssen. Beispielsweise hängt die a priori erwartete Anzahl Invalide für das Jahr 2004 aufgrund der Zeitinhomogenität vom Betrachtungszeitpunkt ab. Es gelten die Definitionen

$$f_{ij} = \frac{\sum_{k \in r(i)} X_{kj}}{\sum_{k \in r(i)} vt_{kj}} \quad (7.1)$$

$$\mu_{ij} = f_{ij} \cdot vt_{ij} \quad (7.2)$$

$$w_{ij} = \mu_{ij} \quad (7.3)$$

$$R_{ij} = \frac{X_{ij}}{\mu_{ij}} \quad (7.4)$$

$$\underline{R}_i^T = (R_{i1}, \dots, R_{in}),$$

wobei für festes i selbstverständlich $f_{ij} = f_{kj} \quad \forall k \in r(i)$ gilt (dies vereinfacht die Notation) und wir aufgrund der Grösse einer Risikoklasse die (geschätzten) f_{ij} als feste, korrekte Invalidenquote ansehen statt als Zufallsvariable. Die Wahl des Volumenmasses w_{ij} begründen wir nach den Modellannahmen.

Für die folgenden Modellannahmen (vgl. Bühlmann-Straub auf Seite 9) gelten zusätzlich implizit die allgemeinen Annahmen 6.1 und 6.4 auf den Seiten 63 und 65.

Modellannahmen 7.1 (Bühlmann-Straub auf standardisierte reine Invalidenquoten) Risiko $i \in \{1, \dots, I\}$ der Risikoklasse $r(i) \in \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3\}$ sei charakterisiert durch sein individuelles Risikoprofil ϑ_i , welches Realisation einer Zufallsvariable Θ_i ist. Gegeben sei weiter ein Beobachtungsvektor $\underline{R}_i^T = (R_{i1}, \dots, R_{in})$, $n \in \mathbb{N}$, und es gelten nebst (7.1)-(7.4):

i) Bedingt, gegeben Θ_i , sind $\{R_{ij} : j = 1, \dots, n\}$ unabhängig und

$$\begin{aligned} E[R_{ij}|\Theta_i] &= \mu(\Theta_i) \\ \text{Var}(R_{ij}|\Theta_i) &= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\mu_{ij}}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

ii) Die Paare $(\Theta_i, \underline{R}_i)_i$ sind unabhängig, und $(\Theta_i)_i$ unabhängig und identisch verteilt.

Für die Strukturparameter gilt $E[\mu(\Theta_i)] = E[R_{ij}] = 1$, $\sigma_{r(i)}^2 = E[\sigma^2(\Theta_i)]$ und $\tau_{r(i)}^2 = \text{Var}(\mu(\Theta_i))$.

Unsere Wahl des Volumenmasses $w_{ij} = \mu_{ij}$ wird mit der Varianzannahme in i) plausibel. Aufgrund der Spätschaden-Problematik (vgl. Kapitel 6.2.2 auf Seite 63) haben Beobachtungen gegen Ende des Beobachtungszeitraums geringere statistische Aussagekraft. Also sollte diesen ein kleineres Gewicht zukommen als älteren Beobachtungen. Die a priori erwartete Anzahl gewichtete Invalide $\mu_{ij} = f_{ij} \cdot vt_{ij}$ widerspiegelt dieses Verhältnis, da sie selbst dem IBNR-Effekt unterliegt.

Im Sinne von Theorem 2.2 auf Seite 9 erhalten wir somit für das Risiko i den (inhomogenen) Credibility-Schätzer

$$\begin{aligned} \widehat{\mu(\Theta_i)} &= \alpha_i R_i + (1 - \alpha_i) \cdot 1, \\ \text{wobei } R_i &= \sum_j \frac{\mu_{ij}}{\mu_{i\bullet}} R_{ij} \\ \alpha_i &= \frac{\mu_{i\bullet}}{\mu_{i\bullet} + \frac{\sigma_{r(i)}^2}{\tau_{r(i)}^2}}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Weiter ergeben sich Schätzer für die Strukturparameter der Risikoklasse \mathcal{R} wie in Kapitel 2.2 aus den Formeln:

$$\widehat{\sigma_{\mathcal{R}}^2} = \frac{1}{I_{\mathcal{R}}} \sum_{i=1}^{I_{\mathcal{R}}} \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \mu_{ij} (R_{ij} - R_i)^2 \quad (7.7)$$

$$\widehat{\tau_{\mathcal{R}}^2} = \max \left\{ \widehat{\sigma_{\mathcal{R}}^2}, 0 \right\}, \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } \widehat{\tau_{\mathcal{R}}^2} &= c \cdot \left\{ \frac{I_{\mathcal{R}}}{I_{\mathcal{R}} - 1} \sum_{i=1}^{I_{\mathcal{R}}} \frac{\mu_{i\bullet}}{\mu_{\bullet\bullet}} (R_{ij} - \bar{R})^2 - \frac{I_{\mathcal{R}} \cdot \widehat{\sigma_{\mathcal{R}}^2}}{\mu_{\bullet\bullet}} \right\} \\ c &= \frac{I_{\mathcal{R}} - 1}{I_{\mathcal{R}}} \left\{ \sum_{i=1}^{I_{\mathcal{R}}} \frac{\mu_{i\bullet}}{\mu_{\bullet\bullet}} \left(1 - \frac{\mu_{i\bullet}}{\mu_{\bullet\bullet}} \right) \right\}^{-1} = \begin{cases} = 1, & \mu_{i\bullet} = \text{const } \forall i \\ > 1, & \text{sonst} \end{cases} \\ \bar{R} &= \sum_{i=1}^{I_{\mathcal{R}}} \frac{\mu_{i\bullet}}{\mu_{\bullet\bullet}} R_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\bullet\bullet} &= \sum_{i=1}^{I_{\mathcal{R}}} \mu_{i\bullet}, & \mu_{i\bullet} &= \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \\ I_{\mathcal{R}} &= |\mathcal{R}|.\end{aligned}\tag{7.9}$$

Weiter sind $\widehat{\sigma_{\mathcal{R}}^2}$ und $\widehat{\tau_{\mathcal{R}}^2}$ biasfrei, d.h. $E[\widehat{\sigma_{\mathcal{R}}^2}] = \sigma_{\mathcal{R}}^2$ und $E[\widehat{\tau_{\mathcal{R}}^2}] = \tau_{\mathcal{R}}^2$, und konsistent ($\widehat{\sigma_{\mathcal{R}}^2} \rightarrow \sigma_{\mathcal{R}}^2$ und $\widehat{\tau_{\mathcal{R}}^2} \rightarrow \tau_{\mathcal{R}}^2$ in Wahrscheinlichkeit für $I \rightarrow \infty$ nach Chebyshev). $\widehat{\tau_{\mathcal{R}}^2}$ wird möglicherweise negativ, weshalb wir den nicht mehr biasfreien Schätzer $\widehat{\tau_{\mathcal{R}}^2}$ verwenden. Ein verschwindender Schätzer für die äussere Varianz bedeutet hierbei, dass es keine messbare Differenz zwischen den Risiken gibt. Dieser Fall ist in der Praxis möglichst zu vermeiden; beispielsweise verwendet man nur einen Teil der verfügbaren Bestandesdaten für die Strukturparameterschätzung, um Volatilitätsprobleme auszuschliessen.

Zur Schätzung der Strukturparameter ziehen wir in unseren Berechnungen ausschliesslich Risiken bei, welche in allen sechs Jahren des Beobachtungszeitraums über eine Beobachtung verfügen. Dies trifft auf die grosse Mehrheit der zu tarifierenden Kollektive zu.

Der erhaltene Credibility-Schätzer repräsentiert nunmehr aber erst die Güte des betrachteten Risikos i relativ zur übergeordneten Risikoklasse $r(i)$ - um den interessierenden Tariffaktor zu erhalten, welcher gemäss Kapitel 6.1 auf den Standardtarif angewandt wird, ist noch die folgende Rechnung durchzuführen:

$$\widehat{t(\Theta_i)} = \varrho_{r(i)} \cdot \widehat{\mu(\Theta_i)},\tag{7.10}$$

wobei $\varrho_{r(i)}$ das prozentuale Standardniveau der Risikoklasse ist, welcher das Risiko i angehört. Gemäss Einleitung zu Kapitel 7 gelten also

$$\begin{aligned}\varrho_{\mathcal{R}_1} &= 0.8 \\ \varrho_{\mathcal{R}_2} &= 1.0 \\ \varrho_{\mathcal{R}_3} &= 1.2\end{aligned}$$

und ausserdem $n = 6$.

7.1.3 Resultate

Der Programmcode zu den nachfolgenden Berechnungen und erwähnten Makros ist am Ende dieses Dokuments in Teil IV zu finden. Wir stellen die Zwischenergebnisse aus dem Berechnungsablauf vor und kommentieren die Resultate.

Zwischenergebnisse

Durchschnittliche Invalidenquoten Ein erster Schritt ist die Berechnung der durchschnittlichen Invalidenquote pro Risikoklasse und pro Beobachtungsjahr aus dem Versichertenbestand. Das Makro `apfactmu` ist dafür und zugleich für die anschliessende Bestimmung der a priori erwarteten Anzahl Invaliditätsfälle zuständig. Es ergeben sich die aus Tabelle 7.1 ersichtlichen durchschnittlichen Invalidenquoten, wobei wir mit $f_{\mathcal{R},j}$ die Menge der f_{ij} bezeichnen mit $i \in \mathcal{R}$ und $\mathcal{R} \in \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3\}$ eine der drei Risikoklassen.

\mathcal{R}	$f_{\mathcal{R},1}$	$f_{\mathcal{R},2}$	$f_{\mathcal{R},3}$	$f_{\mathcal{R},4}$	$f_{\mathcal{R},5}$	$f_{\mathcal{R},6}$
1	0.0051	0.0053	0.0058	0.0054	0.0052	0.0038
2	0.0109	0.0101	0.0098	0.0089	0.0078	0.0053
3	0.0151	0.0159	0.0151	0.0136	0.0115	0.0081

Tabelle 7.1: Durchschnittliche Invalidenquoten

Auffallend ist zunächst die tendentielle Abnahme der Invalidenquoten für steigendes Beobachtungsjahr (besonders in den höheren Risikoklassen). Hier zeigt sich der IBNR-Effekt, welcher in Kapitel 6.2.2 beschrieben worden ist.

Zweitens befinden sich in höheren Risikoklassen jene zu tarifierenden Kollektive, welche aufgrund ihrer Geschäftstätigkeit a priori ein höheres Risiko darstellen. Wir erwarten also systematisch mehr Invaliditätsfälle in höheren Risikoklassen, was sich mit der steigenden Invalidenquote zeigt.

Interessiert man sich an dieser Stelle für die globale mittlere Invalidenquote des verwendeten Datenbestands, so sollte man sich an die mittlere Risikoklasse (mit Standardniveau 100%) im ältesten Beobachtungsjahr (aufgrund der Spätschäden) halten: Ein Wert von etwa einem Prozent ist auf dem Schweizer Markt realistisch.

A priori Erwartungen Dasselbe Makro `apfactmu` multipliziert das dem Risiko und Beobachtungsjahr entsprechende f_{ij} mit seinem Volumenmass (Anzahl Aktive). Man gewinnt dadurch die aus dem Bestand heraus geschätzte erwartete Anzahl Invaliditätsfälle für jedes einzelne Risiko, welche Inhomogenitäten in der Zeit unterliegt. Beispielfhaft führen wir in Tabelle 7.2 jeweils das (ungewichtete) arithmetische Mittel und die Standardabweichung je Risikoklasse und für das erste und letzte Beobachtungsjahr auf, wobei wir eine ähnliche Variablenbezeichnung verwenden wie für die vorangehenden Quoten.

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\mu_{\mathcal{R},1}$	0.0268	0.152
1	$\mu_{\mathcal{R},6}$	0.0307	0.128
2	$\mu_{\mathcal{R},1}$	0.0744	0.308
2	$\mu_{\mathcal{R},6}$	0.0539	0.194
3	$\mu_{\mathcal{R},1}$	0.1381	0.533
3	$\mu_{\mathcal{R},6}$	0.0969	0.287

Tabelle 7.2: A priori erwartete Anzahl Invalide

Die Zunahme der erwarteten Anzahl Schadenfälle mit steigender Risikoklasse ist wiederum klar erkennbar. Auch der IBNR-Effekt schlägt sich erneut nieder. Weil hier jedoch die Anzahl Versicherungsteilnehmer der Kollektive hinzugekommen ist, lässt sich der Anstieg des arithmetischen Mittels für das sechste Beobachtungsjahr in der ersten Risikoklasse erklären (denn die Invalidenquote ist wie in Tabelle 7.1 ersichtlich ja gesunken): Die Bestandesstruktur muss sich während der fünf dazwischen liegenden Jahre dahingehend verändert haben, dass sich nun mehr grosse Kollektive in der Risikoklasse 1 im Portfolio befinden als früher. Dem Mittelwert z.B. der zweiten Risikoklasse im Jahr 2001 kann man im Vergleich

zur entsprechenden Invalidenquote zudem entnehmen, dass das durchschnittliche Kollektiv dort etwa sieben Versicherte umfasst.

Es zeigt sich weiter, dass die Standardabweichung mit höherer Risikoklasse ansteigt und steigendem Beobachtungsjahr sinkt. Beides erklärt sich durch die Höhe der geschätzten Invalidenquoten, welche die a priori Anzahlen proportional weiter voneinander entfernen beziehungsweise näher zueinander rücken lassen.

Beobachtungsvektor Das Makro `rbvectsuf` kalkuliert die Beobachtungsvektorkomponenten sowie die suffiziente Statistik daraus, dargestellt in den nachfolgenden zwei Tabellen. Tabelle 7.3 stellt nunmehr den mit der Versichertenzahl gewichteten Mittelwert der Beobachtungsvektorkomponenten dar. Wieder führen wir exemplarisch je Risikoklasse den ältesten und jüngsten Wert im Beobachtungszeitraum auf.

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$R_{\mathcal{R},1}$	1.004	4.91
1	$R_{\mathcal{R},6}$	0.985	5.87
2	$R_{\mathcal{R},1}$	1.012	3.16
2	$R_{\mathcal{R},6}$	0.971	4.12
3	$R_{\mathcal{R},1}$	1.008	2.47
3	$R_{\mathcal{R},6}$	0.999	3.35

Tabelle 7.3: Gewichtete Statistik der Beobachtungsvektorkomponenten

Da wir die beobachtete Anzahl Invaliditätsfälle relativ zur a priori erwarteten Anzahl betrachten, erwarten wir im Mittelwert ungefähr den Wert 1 für die Beobachtungsvektorkomponenten, womit unsere Beobachtungen übereinstimmen. Die tendentiell höhere Standardabweichung für tiefere Risikoklassen ergibt sich aus der Tatsache, dass Kollektive in tieferen Klassen tendentiell weniger Invaliditätsfälle aufweisen - ein zusätzlicher Invaliditätsfall (und diese sind immer ganzzahlig) wiegt relativ zur kontinuierlichen a priori Erwartung also schwerer und verursacht grössere Heterogenität. Aufgrund von Spätschäden weisen ältere Beobachtungen zudem jeweils tendentiell mehr Schadenfälle auf, was die Volatilität ebenfalls erhöht.

Suffiziente Statistik Die je Risikoklasse mit der Versichertenzahl gewichteten Mittelwerte der suffizienten Statistik sollten ebenfalls nahe 1 liegen und sind in Tabelle 7.4 aufgelistet. Die höhere Volatilität für tiefere Risikoklassen erklärt sich analog zur vorangehenden Tabelle.

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$R_{\mathcal{R}}$	0.9971	2.332
2	$R_{\mathcal{R}}$	0.9925	1.490
3	$R_{\mathcal{R}}$	0.9913	1.128

Tabelle 7.4: Gewichtete suffiziente Statistik

Risikointerne Varianz Wir gelangen zur Schätzung der inneren Varianz anhand des Makros `sigma2`. Es ergeben sich die in Tabelle 7.5 präsentierten Schätzungen je Risikoklasse.

\mathcal{R}	$\widehat{\sigma_{\mathcal{R}}^2}$
1	0.943
2	0.787
3	0.836

Tabelle 7.5: Geschätzte innere Varianz je Risikoklasse

Die risikointerne Schwankung drückt die Homogenität der Beobachtungen desselben Risikos über die verschiedenen Beobachtungsjahre hinweg aus. Es ist daher zu erwarten, dass sehr gute Risiken der Risikoklasse 1 mit nur wenigen gelegentlichen (ganzzahligen) Schadenfällen relativ gesehen rasch eine eher hohe innere Inhomogenität aufweisen können (zudem ist das arithmetische Mittel im Varianzschätzer nicht robust gegen Ausreisser). In unserem Teilbestand weist die zweite Risikoklasse im Durchschnitt die gleichmässigste Verteilung der Schadenfälle auf die sechs Beobachtungsjahre auf.

Varianz zwischen den Risiken Makro `tau2` kalkuliert den Schätzer für die äussere Varianz klassiert nach Risikoklasse wie in Tabelle 7.6 aufgeführt. Hier ist eine klare Tendenz zu geringerer Schwankung zwischen den Risiken für höhere Risikoklassen erkennbar.

Dieses Resultat erstaunt auf den ersten Blick, würde man intuitiv in Risikoklasse 3 doch von grösserer Heterogenität ausgehen als in der ersten Klasse. Wir betrachten jedoch keine Anzahlen, sondern Relativwerte aus einer ganzzahligen Anzahl Schadenfälle und einem kontinuierlichen a priori erwarteten Niveau. Wie in Tabelle 7.1 ersichtlich, verursacht z.B. ein zusätzlicher Schadenfall in der ersten Risikoklasse im ersten Beobachtungsjahr einen etwa dreimal so hohen prozentualen Ausschlag wie für ein Kollektiv der dritten Klasse. Hinsichtlich der Beobachtungsvektorkomponenten ist damit die erste Risikoklasse heterogener als die dritte.

\mathcal{R}	$\widehat{\tau_{\mathcal{R}}^2}$
1	0.564
2	0.389
3	0.162

Tabelle 7.6: Geschätzte äussere Varianz je Risikoklasse

Credibility-Koeffizient Aus den obigen beiden Varianzschätzern ergibt sich der Credibility-Koeffizient $\kappa = \frac{\sigma^2}{\tau^2}$ (siehe letzte Bemerkung im Kapitel 1.2). Er repräsentiert das nötige Volumen im Sinne des gewählten Volumenmasses (bei uns die nötige a priori erwartete Anzahl Invaliditätsfälle), um ein Credibility-Gewicht von 50% zu erreichen.

\mathcal{R}	$\kappa_{\mathcal{R}}$
1	1.67
2	2.02
3	5.16

Tabelle 7.7: Credibility-Koeffizient je Risikoklasse

Man erkennt klar, dass Kollektive in höheren Risikoklassen im Durchschnitt mehr Beschäftigte aufweisen müssen, um im selben Masse nach der individuellen Risikoerfahrung tarifiert zu werden, wie Kollektive tieferer Klassen.

Credibility-Gewichte Schliesslich erhalten wir durch das Makro `makecred` die Credibility-Gewichte wie auch relativen Credibility-Schätzer unseres Modells (und ferner die Tariffaktoren nach unserer Vorgabe in (7.10)), wobei Tabelle 7.8 die mit der Versichertenzahl gewichteten arithmetischen Mittelwerte der Credibility-Gewichte je Klasse aufführt.

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\alpha_{\mathcal{R}}$	0.413	0.32
2	$\alpha_{\mathcal{R}}$	0.487	0.31
3	$\alpha_{\mathcal{R}}$	0.408	0.29

Tabelle 7.8: Gewichtete Statistik der Credibility-Gewichte je Risikoklasse

Alle drei Risikoklassen weisen durchschnittlich ein beachtliches Credibility-Gewicht zwischen 40 und 50 Prozent auf, wobei die Spannweite in allen Klassen von nahezu 0% bis maximal etwa 97% reicht.

Credibility-Schätzer Wir zeigen weiter in Tabelle 7.9 den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der Credibility-Schätzer in jeder Klasse.

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\widehat{\mu(\Theta_{\mathcal{R}})}$	1.0002	0.205
2	$\widehat{\mu(\Theta_{\mathcal{R}})}$	0.9904	0.217
3	$\widehat{\mu(\Theta_{\mathcal{R}})}$	0.9968	0.137

Tabelle 7.9: Statistik der Credibility-Schätzer je Risikoklasse

Weil diese Schätzer eine relative Aussage über die Güte des Risikos im Verhältnis zur zugehörigen Risikoklasse sind, erwarten wir im Mittel den Wert 1 in jeder Risikoklasse - unsere Beobachtung bestätigt diese Erwartung. Mit der tieferen externen Varianz in der dritten Risikoklasse (und den kleineren Credibility-Gewichten als in Klasse 2) geht auch hier die eher tiefe Standardabweichung einher.

Tariffaktoren Für die gewichteten durchschnittlichen Tariffaktoren ergeben sich erwartungsgemäss Werte in der Nähe der Standardniveaus 0.8, 1.0 und 1.2.

Die Minima und Maxima zeigen die Spannweite der Tariffaktoren für jede Risikoklasse auf.

\mathcal{R}	var	min	max	mean	std
1	$\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}$	0.146	3.540	0.797	0.410
2	$\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}$	0.134	3.573	1.037	0.480
3	$\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}$	0.378	3.071	1.212	0.356
alle	$\widehat{t(\Theta_{\bullet})}$	0.134	3.573	1.018	0.457

Tabelle 7.10: Gewichtete Statistik der Tariffaktoren je Risikoklasse

Wie erwartet ergibt sich gesamthaft ein gewichteter Mittelwert von ungefähr 1, was basierend auf dem Standard-Prämienniveau dafür sorgt, dass die Prämieinnahmen in Erwartung der totalen Schadensumme entsprechen. Die totale Spannweite der Tariffaktoren (bis auf wenige Ausreisser) kann möglicherweise mit aufsichtsrechtlichen Restriktionen des BPV (Bundesamt für Privatversicherungen) in Konflikt stehen, was z.B. eine zentrische Stauchung aller Tariffaktoren erfordert. Weiter ist auffällig, dass das Tariffaktorminimum der Risikoklasse 2 niedriger liegt als jenes der Risikoklasse 1. In Klasse 2 befindet sich demnach mindestens ein sehr gutes Risiko. Falls dieses Kollektiv eine grosse Belegschaft aufweist, kann es zu einer tieferen Tarifierung gelangen als Risiken in Risikoklasse 1 mit weniger Beschäftigten (aufgrund des Credibility-Gewichts).

Illustrierte Endresultate

In diesem Abschnitt kommentieren wir Abbildungen zu den resultierenden Credibility-Gewichten, Credibility-Schätzern und Tariffaktoren in Abhängigkeit der Anzahl Personenjahre (die Summe der Anzahl Versicherten im Beobachtungszeitraum).

Abbildung 7.1: Credibility-Gewichte Abbildung 7.1 plottet das Credibility-Gewicht jedes zu tarifierenden Kollektivs für seine Anzahl Personenjahre. Aus der Formel

$$\alpha_i = \frac{\mu_{i\bullet}}{\mu_{i\bullet} + \frac{\sigma_{r(i)}^2}{\tau_{r(i)}^2}}$$

sowie der Tatsache, dass die aus dem Bestand geschätzte mittlere Invalidenquote innerhalb derselben Risikoklasse konstant ist in einem Jahr, folgen die klar erkennbaren drei Kurven je Risikoklasse, von unten nach oben die Klassen 3, 1, 2 (dies kann z.B. Tabelle 7.8 entnommen werden). Ein Credibility-Gewicht ab ca. 20% kann beispielsweise als unteres Limit verstanden werden, um von einer relevanten Einflussnahme der individuellen Schadenbeobachtung auszugehen. Demnach ist der Grafik zu entnehmen, dass hierzu mindestens etwa 90, 70 und 120 Personenjahre in den Risikoklassen 1, 2 respektive 3 vonnöten sind. Bei einem Beobachtungszeitraum von sechs Jahren bedeutet dies, dass Kollektive mit weniger als 15, 12 bzw. 20 Versicherten in den Risikoklassen 1 bis 3 weitestgehend anhand des Mittels der jeweiligen Risikoklasse tarifiert werden (der Credibility-Schätzer ergibt nahezu 100%), ohne dass die individuelle Risikobeobachtung eine

signifikante Rolle spielt. Man beobachtet weiter, dass in den drei Klassen Kollektive mindestens 500, 330 respektive 580 Versicherte aufweisen müssen, um zu 90% anhand ihrer eigenen Risikoerfahrung tarifiert zu werden.

Abbildung 7.2: Credibility-Schätzer In Abbildung 7.2 sind die Credibility-Schätzer der Kollektive für alle Risikoklassen dargestellt. Wir haben anhand der Credibility-Gewichte soeben gesehen, dass kleine Kollektive mehrheitlich nach dem Tarifmittel ihrer Risikoklasse bewertet werden und somit in der Regel einen Credibility-Schätzer von 100% erhalten. Dementsprechend 'starten' die meisten Kollektive bei 100%. Klar erkennbar sind jedoch auch diskrete höhere Starts (jedoch keine tieferen). Diese entstehen dadurch, dass ein einzelner (ganzzahliger) Invaliditätsfall für ein sehr kleines Kollektiv eine gewaltige beobachtete relative Invalidenquote produziert, welche sich entsprechend in der suffizienten Statistik niederschlägt. Diese wird zwar nur mit einem geringen Credibility-Gewicht in den Schätzer mit einbezogen - die immens hohe Prozentzahl führt aber dennoch zu einem viel höheren Niveau als 100%. Man beobachtet auch, dass höhere 'Starts' weiter von der Ordinate entfernt beginnen (denn ein Kollektiv mit drei Versicherten wird nicht fünf Schadenfälle aufweisen).

Die Untergrenze der gesamten Darstellung repräsentiert jeweils die versicherten Kollektive mit null beobachteten Schadenfällen bei entsprechender Anzahl Personenjahre. Hieraus ersehen wir beispielsweise, dass ein Abschlag um 60% vom Tarifniveau der zugehörigen Risikoklasse erst ab etwa 330 Personenjahren oder 55 Angestellten möglich ist (in Risikoklasse 2).

Abbildungen 7.3-7.5: Tariffaktoren Die resultierenden Tariffaktoren wurden risikoklassenweise gegen die Anzahl Personenjahre geplottet. Es zeigen sich klar die Hauptstränge aus unseren Risikoklassenmitteln 0.8, 1.0 und 1.2 heraus. Ein Kollektiv in Risikoklasse 1 kann ohne Schadenfälle ab etwa 1200 Personenjahren oder 200 Aktiven einen Tariffaktor von 20% erreichen, und dies ist auch aus den anderen Klassen möglich, in Klasse 2 etwas früher, in Klasse 3 später (die Abszisse entspricht keinem zeitlichen Verlauf!). Wenngleich ein 'gutes Risiko' ohne Schadenfälle in einer höheren Risikoklasse bei kleiner Belegschaft höher tarifiert wird, so kann es mit zunehmender Versichertenzahl dafür rascher (steiler) auf ein tieferes Tarifniveau gelangen.

Anhand der Interpretationen zu den Credibility-Schätzern wird zudem klar, dass die einzelnen Stränge von unten her gezählt die Anzahl Schadenfälle (null, einen, zwei...) bedeuten. Am Beispiel der Risikoklasse 1 ist also zu erkennen, dass ein Kollektiv mit *einem* Schadenfall etwa 200 Personenjahre benötigt, um statistisch ausreichend zu belegen, dass es nicht systematisch schlechter als seine Risikoklasse ist und der Schadenfall nur Zufall war (bei zwei Invaliden sind es 630 Personenjahre, bei drei Fällen 900).

Weiter fällt auf, dass in Risikoklasse 1 die höchsten relativen Sprünge im Tariffaktor für einzelne zusätzliche Schadenfälle stattfinden und in Risikoklasse 3 die kleinsten. Dies macht Sinn, weil ein Kollektiv mit zusätzlichen Schadenfällen tendentiell seine Zugehörigkeit zu einer Klasse schlechterer Risiken erweist und somit auch eher danach tarifiert werden sollte. Ein sehr kleines Kollektiv der Risikoklasse 1 mit einem Schadenfall liegt mit einem Tariffaktor von 1.28 jedoch immer noch tiefer als ein analoges Kollektiv der Risikoklasse 2 mit Faktor 1.48, aber letzteres liegt höher als ein analoges Kollektiv der Risikoklasse 3 mit 1.42!

Dieser Umstand liegt in der je Risikoklasse separaten Strukturparameterschätzung begründet und könnte beispielsweise dadurch behoben werden, dass nur eine einzige, globale Strukturparameterschätzung erfolgt. Der unschöne Effekt betrifft allerdings nur kleinere Kollektive, weil die höher angesetzten Stränge der Risikoklasse 2 steiler sinken als jene der Klasse 3.

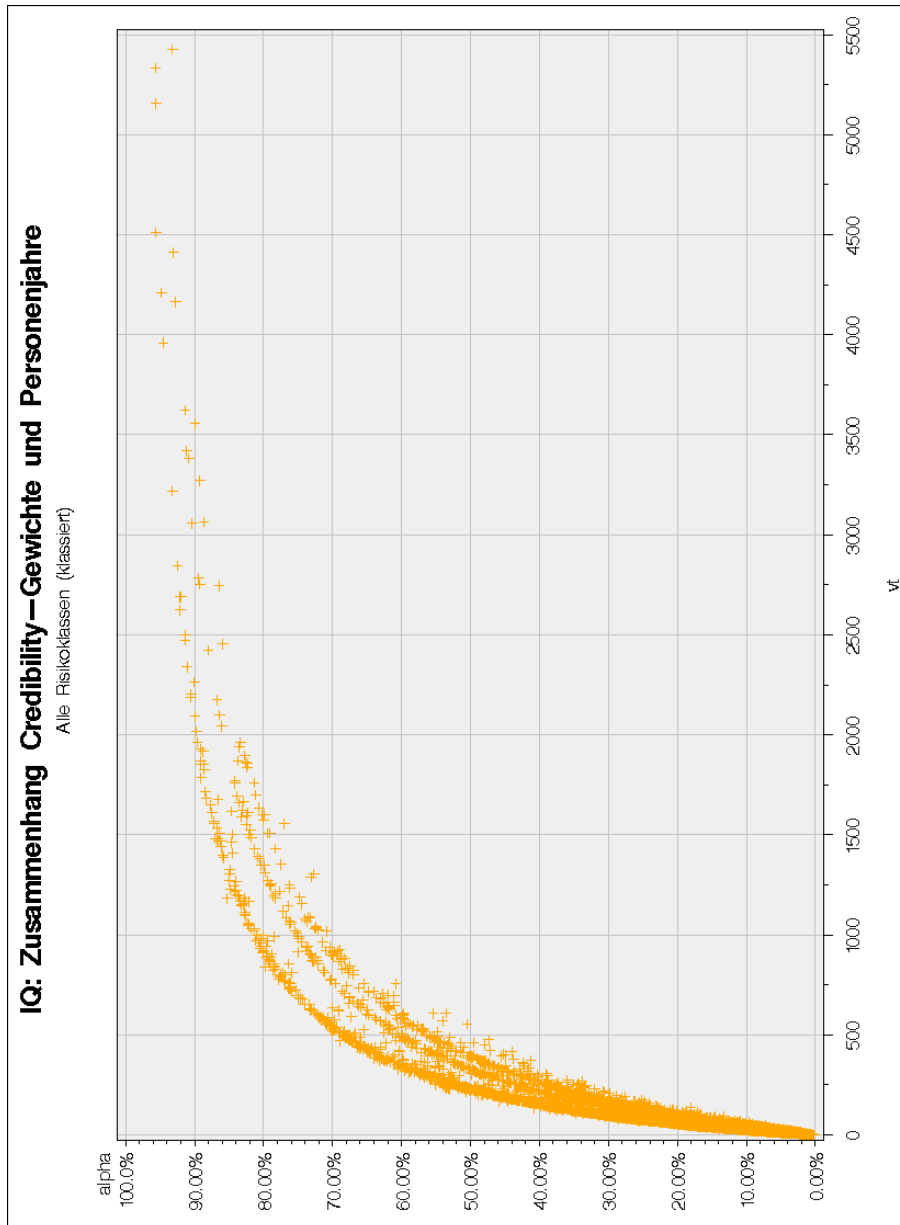


Abbildung 7.1: Credibility-Gewichte nach Personenjahren

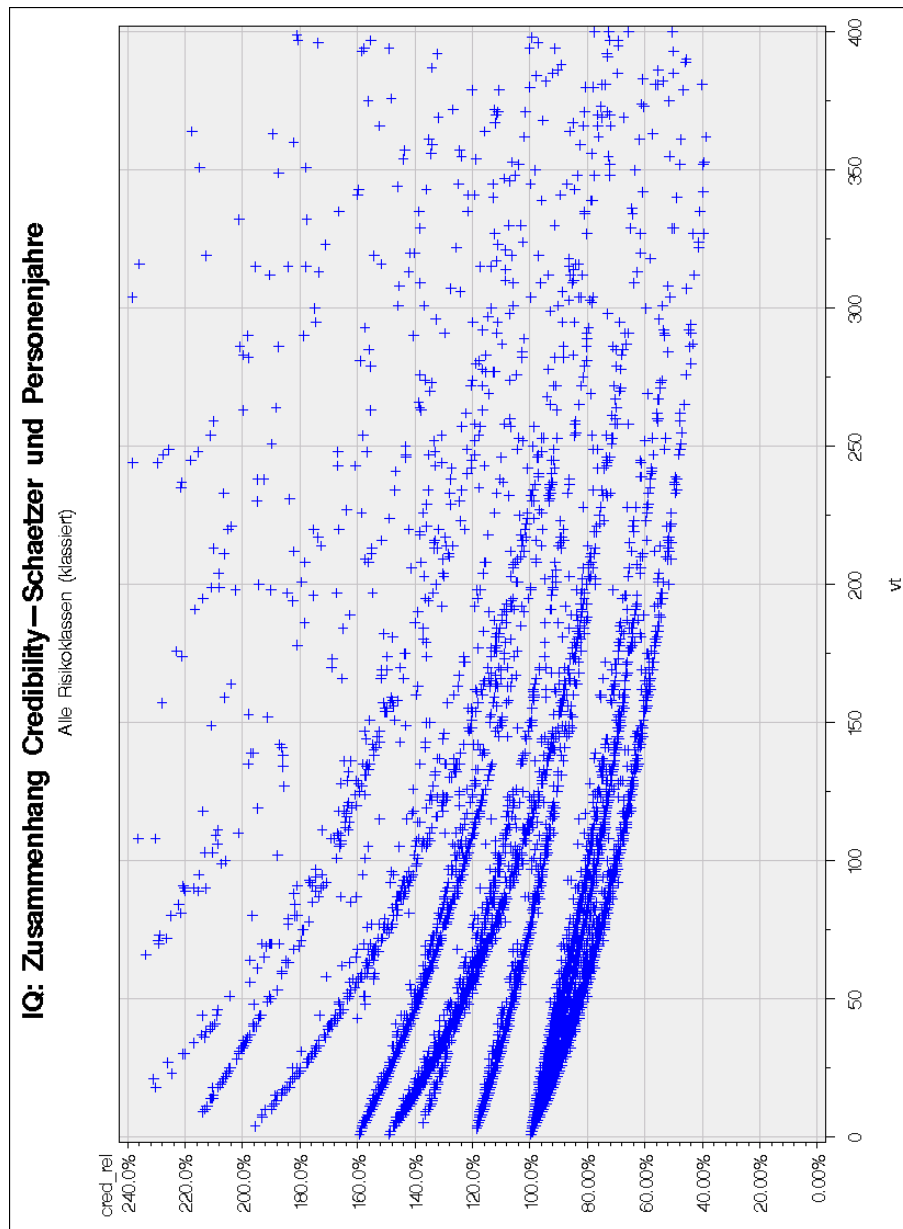


Abbildung 7.2: Credibility-Schätzer nach Personenjahren

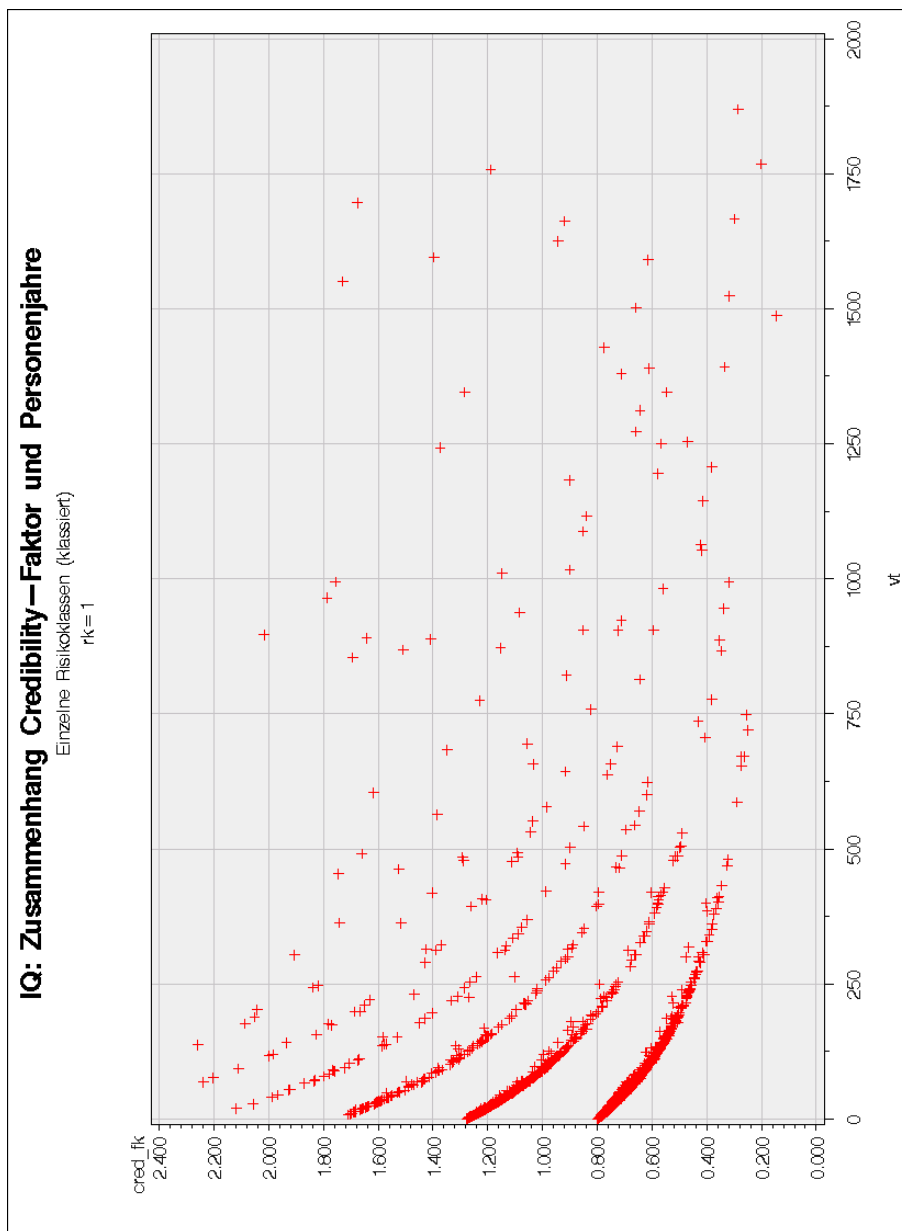


Abbildung 7.3: Credibility-Faktor der Risikoklasse 1 nach Personenjahren

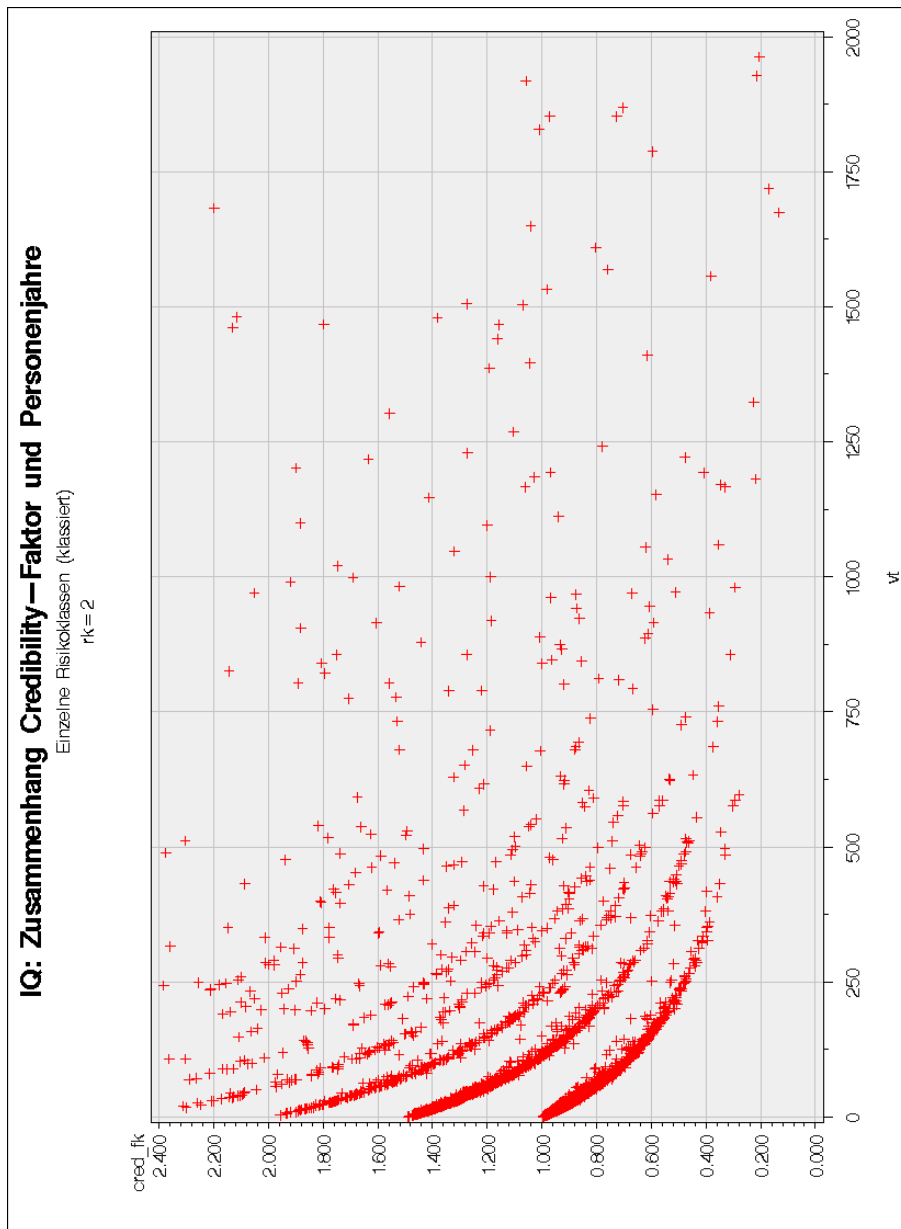


Abbildung 7.4: Credibility-Faktor der Risikoklasse 2 nach Personenjahren

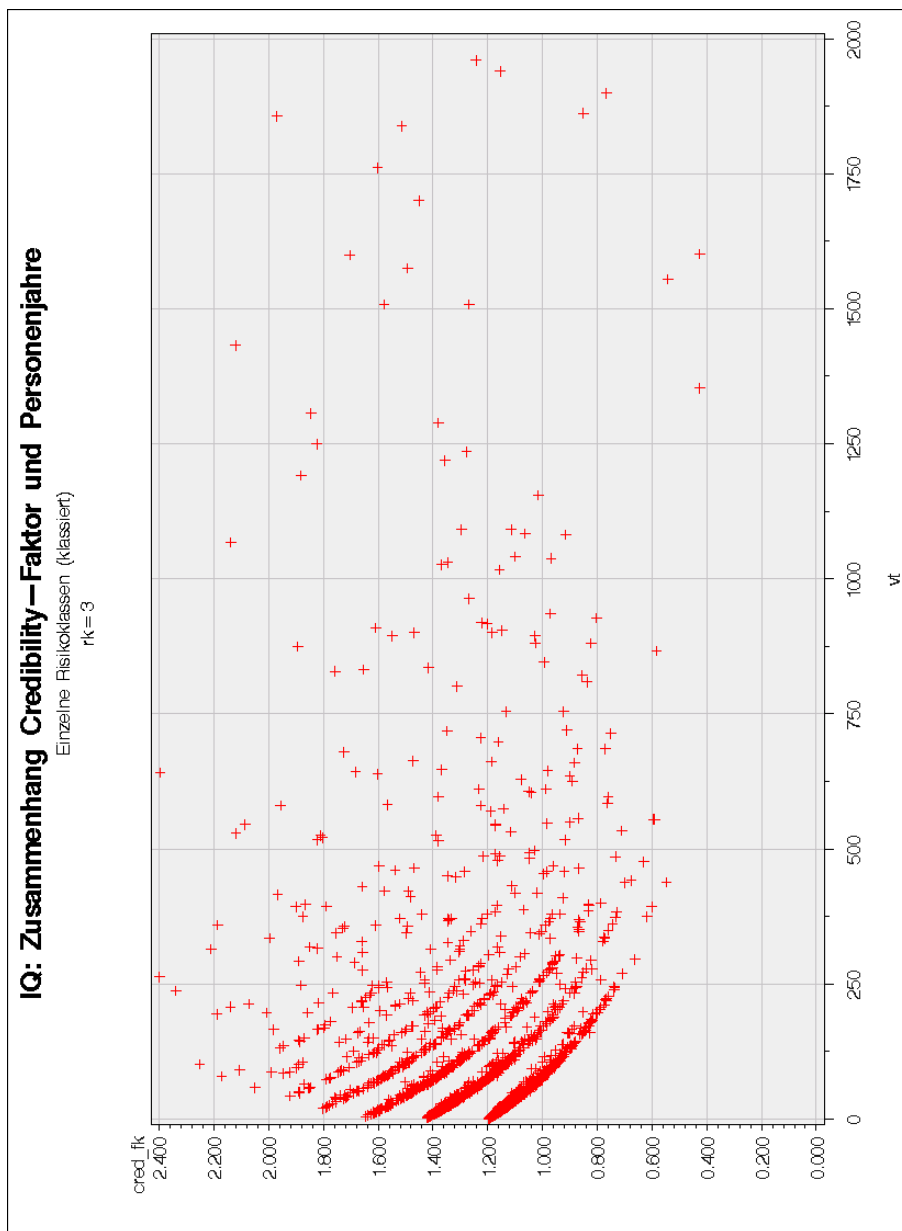


Abbildung 7.5: Credibility-Faktor der Risikoklasse 3 nach Personenjahren

7.2 Schadenquoten-Modell

Wiederum beginnt dieses Kapitel mit einer Motivation in 7.2.1, welche die formalen Modellannahmen in 7.2.2 anführt. Ein Teilbestand eines Lebensversicherers bildet erneut Basis für die konkreten praktischen Berechnungen im Schlussteil 7.2.3.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass das Schadenquoten-Modell keiner Korrektur im Sinne von Kapitel 8 bedarf, was ein Vorteil gegenüber den Invalidenquoten-Modellen und dem Schadenraten-Modell ist.

7.2.1 Motivation

Schadenshöhen zu betrachten birgt wie bereits in der Motivation zum Invalidenquoten-Modell erwähnt gewisse Nachteile, denn sie unterliegen für einzelne Schäden mehrheitlich unabhängig von der Risikocharakteristik grossen Schwankungen. Dies wird sich entsprechend auf die Varianzkomponenten σ^2 und τ^2 auswirken.

Dennoch liegt die Motivation für die Berücksichtigung der Schadenssumme relativ zur bezahlten Prämie eines zu tarifierenden Kollektivs auf der Hand: Verursacht ein Risiko systematisch höhere Schadenbeträge, als in Form von Risikoprämien beigesteuert wird, so sollte ein Prämienaufschlag erfolgen und umgekehrt. Ein Invalidenquoten-Modell kann nicht erfassen, ob ein Kollektiv systematisch hohe Schadenbeträge pro Fall verursacht. Wir begutachten also die Schadenquoten $sq_{ij} = \frac{ss_{ij}}{\pi_{ij}}$ der verschiedenen Risiken relativ zueinander, wobei

ss_{ij}	Schadenssumme des Risikos i im Jahr j
π_{ij}	Risikoprämie von Risiko i im Jahr j .

Bei der zu verwendenden Risikoprämie stellt sich die Frage, ob man die tatsächlich verrechnete Prämie (nach risikogerechtem Pricing) verwenden soll oder aber die 100%-Prämie nach Standardtarif (vor Einbezug individueller Beobachtungen). Die tatsächliche Prämie zu verwenden, könnte eine gewisse Subjektivität einbringen und würde ausserdem in einer Art rekursiven Tarifierung resultieren. Die Schadenssumme relativ zur 100%-Prämie nach Standardtarif zu betrachten, würde hingegen eine stets objektive und vergleichbare Basis aller Risiken bedeuten. Sie bringt überdies den Vorteil mit sich, dass keine 'doppelte Bestrafung und Belohnung' wie in Kapitel 8 beschrieben auftritt - wir verwenden also die Prämie nach Standardtarif.

7.2.2 Formales Modell

Das Schadenquoten-Modell erfordert eine abweichende Notation für die Risiken $i \in \{1, \dots, I\}$ der Risikoklassen \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 und \mathcal{R}_3 in den Jahren $j \in \{1, \dots, n\}$:

p_{ij}	Ausgezahlte Leistungen an das Risiko i im Jahr j
res_{ij}	Rückstellung für das Risiko i im Jahr j
π_{ij}	100%-Prämie nach Standardtarif von Risiko i im Jahr j
ss_{ij}	Schadenssumme des Risikos i im Jahr j
$r(i)$	Risikoklasse, welcher das Risiko i angehört
f_{ij}	Durchschnittliche Schadenquote der Risikoklasse $r(i)$ im Jahr j
μ_{ij}	A priori erwartete Schadenssumme des Risikos i im Jahr j
w_{ij}	Volumenmass des Risikos i im Jahr j
\underline{R}_i	Beobachtungsvektor des Risikos i im Observationszeitraum
R_{ij}	Komponente des Jahres j im Beobachtungsvektor \underline{R}_i

Hierbei gelten die folgenden Definitionen:

$$ss_{ij} = p_{ij} + res_{ij} \quad (7.11)$$

$$f_{ij} = \frac{\sum_{k \in r(i)} ss_{kj}}{\sum_{k \in r(i)} \pi_{kj}} \quad (7.12)$$

$$\mu_{ij} = f_{ij} \cdot \pi_{ij} \quad (7.13)$$

$$w_{ij} = \mu_{ij} \quad (7.14)$$

$$R_{ij} = \frac{ss_{ij}}{\mu_{ij}} \quad (7.15)$$

$$\underline{R}_i^T = (R_{i1}, \dots, R_{in}),$$

wobei wieder $f_{ij} = f_{kj} \quad \forall k \in r(i)$ gilt und wir eine Begründung für die Wahl des Volumenmasses w_{ij} nach den Modellannahmen liefern.

Wir fordern erneut implizit die Annahmen 6.1 und 6.4 auf den Seiten 63 und 65. Der Einsatz des Modells von Bühlmann-Straub (Kapitel 2) angewandt auf unsere Situation liefert die folgenden Modellannahmen:

Modellannahmen 7.2 (Bühlmann-Straub auf standardisierte Schadenquoten) Risiko $i \in \{1, \dots, I\}$ der Risikoklasse $r(i) \in \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3\}$ sei charakterisiert durch sein individuelles Risikoprofil ϑ_i , welches Realisation einer Zufallsvariable Θ_i ist. Gegeben sei weiter ein Beobachtungsvektor $\underline{R}_i^T = (R_{i1}, \dots, R_{in})$, $n \in \mathbb{N}$, und es gelten nebst (7.11)-(7.15):

i) Bedingt, gegeben Θ_i , sind $\{R_{ij} : j = 1, \dots, n\}$ unabhängig und

$$\begin{aligned} E[R_{ij}|\Theta_i] &= \mu(\Theta_i) \\ \text{Var}(R_{ij}|\Theta_i) &= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\mu_{ij}}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

ii) Die Paare $(\Theta_i, \underline{R}_i)_i$ sind unabhängig, und $(\Theta_i)_i$ unabhängig und identisch verteilt.

Für die Strukturparameterschätzer folgt direkt $E[\mu(\Theta_i)] = E[R_{ij}] = 1$, $\sigma_{r(i)}^2 = E[\sigma^2(\Theta_i)]$ und $\tau_{r(i)}^2 = \text{Var}(\mu(\Theta_i))$.

Das Volumenmass $w_{ij} = \mu_{ij}$ reflektiert analog zur Erklärung unterhalb der Modellannahmen 7.1 die höhere Volatilität der jüngeren Beobachtungen aufgrund des IBNR-Effekts in der durchschnittlichen Schadenquote der Risikoklasse sowie die stärkere Schwankung der relativen Beobachtungen für kleinere Verträge (mit geringeren Prämien). Diese Modellannahmen ergeben den gleichen Credibility-Schätzer (7.6), und wir verwenden analog die Strukturparameter-Schätzungen (7.7) und (7.8). Der Tariffaktor ergibt sich aus (7.10).

7.2.3 Resultate

Der zugehörige Programmcode ist am Ende dieses Dokuments in Teil IV zu finden. Wieder stellen wir die Zwischenresultate aus dem Berechnungsablauf vor und kommentieren diese wo abweichend vom Invalidenquoten-Modell. Um in allen drei Risikoklassen positive Schätzer für die äussere Varianz zu erhalten, haben wir an die einbezogenen Kollektive die Anforderung gestellt, in jedem versicherten Jahr eine gewisse Mindestprämie bezahlt zu haben.

Zwischenergebnisse

Durchschnittliche Schadenquoten Makro `apfactmu` berechnet die mittlere Schadenquote pro Risikoklasse und Beobachtungsjahr wie in Tabelle 7.11 dargestellt. Wir beobachten analog zu den Invalidenquoten eine Abnahme der Mittel für steigendes Beobachtungsjahr und sinkende Risikoklasse.

\mathcal{R}	$f_{\mathcal{R},1}$	$f_{\mathcal{R},2}$	$f_{\mathcal{R},3}$	$f_{\mathcal{R},4}$	$f_{\mathcal{R},5}$	$f_{\mathcal{R},6}$
1	0.4295	0.4125	0.5533	0.2825	0.2019	0.1796
2	0.8488	0.8441	0.8847	0.5223	0.4604	0.2311
3	1.2571	1.5559	1.3929	1.0101	0.6941	0.4809

Tabelle 7.11: Durchschnittliche Schadenquoten

Hervorzuheben ist an dieser Stelle, dass die mittlere Schadenquote keineswegs mittig über die Risikoklassen verteilt ist (wir betrachten dazu das älteste und hinsichtlich IBNR-Effekt zuverlässigste Beobachtungsjahr): Die mittlere Risikoklasse weist im Schnitt eine Schadenquote von etwa 85% auf (also unterhalb des 100%-Niveaus), während die Mittelwerte der ersten und dritten Risikoklasse um jeweils ca. 40% nach unten respektive oben davon abweichen. Das schlechte Schadenjahr 2002 weist wie auch schon für die Invalidenquoten hohe Werte auf.

A priori Erwartungen Tabelle 7.12 führt die a priori erwarteten Schadensummen für ein mittleres Risiko auf. Hier zeigt sich jeweils der Spätschaden-Effekt vom ersten zum sechsten Beobachtungsjahr, während die steigende Schadensumme mit höherer Risikoklasse die dort angesiedelten schlechteren Risiken widerspiegelt.

Beobachtungsvektor Für die Kalkulation der Beobachtungsvektorkomponenten und der suffizienten Statistik ist erneut das Makro `rbvectsuf` zuständig.

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\mu_{\mathcal{R},1}$	24'907	69'082
1	$\mu_{\mathcal{R},6}$	21'200	46'764
2	$\mu_{\mathcal{R},1}$	41'664	78'847
2	$\mu_{\mathcal{R},6}$	22'047	34'475
3	$\mu_{\mathcal{R},1}$	71'126	387'724
3	$\mu_{\mathcal{R},6}$	37'458	61'910

Tabelle 7.12: A priori erwartete Schadenssumme

Die *nach der Prämien*summe (im Beobachtungszeitraum) gewichteten Mittel der Vektorkomponenten sind in Tabelle 7.13 aufgelistet. Alle Interpretationen sind analog zur Tabelle 7.3 für Invalidenquoten.

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$R_{\mathcal{R},1}$	0.987	3.40
1	$R_{\mathcal{R},6}$	1.078	6.06
2	$R_{\mathcal{R},1}$	0.965	2.51
2	$R_{\mathcal{R},6}$	0.996	3.62
3	$R_{\mathcal{R},1}$	1.057	2.52
3	$R_{\mathcal{R},6}$	0.970	2.85

Tabelle 7.13: Gewichtete Statistik der Beobachtungsvektorkomponenten

Suffiziente Statistik Auch die suffiziente Statistik in Tabelle 7.14 erklärt sich analog zum Invalidenquoten-Modell.

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$R_{\mathcal{R}}$	1.136	2.92
2	$R_{\mathcal{R}}$	1.048	1.75
3	$R_{\mathcal{R}}$	1.011	1.21

Tabelle 7.14: Gewichtete suffiziente Statistik

Risikointerne Varianz Makro `sigma2` berechnet die Schätzer für die innere Varianz je Risikoklasse, welche in Tabelle 7.15 aufgeführt sind. Der hohe Schätzer in Risikoklasse 1 ist analog auf wenige einzelne Schadenfälle im Beobachtungszeitraum zurückzuführen, wo die hohe Schwankung der Schadenhöhen für zusätzliche Ungleichmässigkeit sorgt. Risikoklasse 3 weist hinsichtlich der Schadenquote die grösste Homogenität auf.

Varianz zwischen den Risiken Die in Tabelle 7.16 aufgelisteten Schätzer für die äussere Varianz des Makros `tau2` zeichnen ein etwas anderes Bild ab als im Invalidenquoten-Modell. Der vergleichsweise tiefe Wert in Risikoklasse 1 ist womöglich auf eher geringe Schadenssummen zurückzuführen, die prozentual zum Mittel gesehen keine immense Schwankung aufweisen. Die mittlere Risikoklasse

\mathcal{R}	$\widehat{\sigma}_{\mathcal{R}}^2$
1	586'970
2	371'445
3	360'979

Tabelle 7.15: Geschätzte innere Varianz je Risikoklasse

ist zugleich die grösste - das führt hier dazu, dass Risikoklasse 2 weniger homogen ist.

\mathcal{R}	$\widehat{\tau}_{\mathcal{R}}^2$
1	0.363
2	0.570
3	0.463

Tabelle 7.16: Geschätzte äussere Varianz je Risikoklasse

Credibility-Koeffizient Aus den obigen beiden Varianzschätzern ergibt sich der Credibility-Koeffizient $\kappa = \frac{\sigma^2}{\tau^2}$ (siehe letzte Bemerkung im Kapitel 1.2). Er repräsentiert das nötige Volumen im Sinne des gewählten Volumenmasses (hier die nötige a priori erwartete Schadenssumme), um ein Credibility-Gewicht von 50% zu erreichen. Tabelle 7.17 listet die Werte in CHF 1'000 auf.

\mathcal{R}	$\kappa_{\mathcal{R}}$
1	1'616
2	652
3	780

Tabelle 7.17: Credibility-Koeffizient je Risikoklasse

Man erkennt klar, dass im Gegensatz zum Invalidenquoten-Modell hier Kollektive in der *tiefsten* Risikoklasse im Durchschnitt mehr 100%-Prämie nach Standardtarif aufweisen müssen, um im selben Masse nach der individuellen Risikoerfahrung tarifiert zu werden, wie Kollektive höherer Klassen.

Credibility-Gewichte Makro `makecred` berechnet nunmehr die Credibility-Gewichte, -Schätzer und Tariffaktoren. Erstere werden in Tabelle 7.18 präsentiert (gewichtete Mittelwerte). Auffällig im Vergleich zum Invalidenquoten-Modell ist das mit der Risikoklasse eindeutig steigende Credibility-Gewicht. Dieses rührt von den höheren a priori Erwartungen her aufgrund des höheren Standard-Prämienniveaus.

Credibility-Schätzer Für die Credibility-Schätzer in Tabelle 7.19 ergeben sich wiederum Werte von ungefähr 1, wobei die Standardabweichungen sich entsprechend der äusseren Varianz aus Tabelle 7.16 verhalten.

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\alpha_{\mathcal{R}}$	0.238	0.21
2	$\alpha_{\mathcal{R}}$	0.399	0.23
3	$\alpha_{\mathcal{R}}$	0.441	0.25

Tabelle 7.18: Gewichtete Statistik der Credibility-Gewichte je Risikoklasse

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	1.0014	0.159
2	$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	1.0033	0.341
3	$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	1.0154	0.323

Tabelle 7.19: Statistik der Credibility-Schätzer je Risikoklasse

Tariffaktoren Schliesslich ergeben die mit der Prämien­summe gewichteten Mittelwerte und Minima/Maxima für die Tariffaktoren die in Tabelle 7.20 dargelegten Werte. Die Interpretation ist analog zum Invalidenquoten-Modell.

\mathcal{R}	var	min	max	mean	std
1	$\widehat{\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	0.424	1.602	0.816	0.178
2	$\widehat{\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	0.386	2.776	1.009	0.297
3	$\widehat{\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	0.392	4.062	1.214	0.417
alle	$\widehat{\widehat{t(\Theta_{\bullet})}}$	0.386	4.062	0.978	0.327

Tabelle 7.20: Gewichtete Statistik der Tariffaktoren je Risikoklasse

Illustrierte Endresultate

In diesem Abschnitt präsentieren wir erneut Abbildungen zu den resultierenden Credibility-Gewichten, Credibility-Schätzern und Tariffaktoren in Abhängigkeit der Standardtarif-Prämien­summe über dem Beobachtungszeitraum und kommentieren diese.

Abbildung 7.6: Credibility-Gewichte Es sind wieder drei Kurven für je eine Risikoklasse erkennbar, wobei wir von unten nach oben die Klassen 1, 2 und 3 zählen. Die Credibility-Gewichte der Risikoklasse 1 fallen deutlich von jenen der anderen Klassen ab, was hauptsächlich durch die geringe äussere Varianz der ersten Risikoklasse begründet ist. Um ein Gewicht von 20% zu erreichen, ist der Reihe nach in den Klassen 1, 2 und 3 für ein Kollektiv jeweils eine Prämien­summe von 1.3 Mio., 0.3 Mio. und 0.2 Mio. CHF vonnöten. Eine Credibility von 90% erreichen Kollektive der zweiten und dritten Klasse ab etwa 8 Mio. bzw. 6 Mio. CHF, während die erste Risikoklasse dieses Niveau in der Realität faktisch nie erreicht.

Abbildung 7.7: Credibility-Schätzer Diese Abbildung zeigt den Credibility-Schätzer aller zu tarifierenden Kollektive gesamtheitlich, wobei schwach drei 'Stränge' die Risikoklassen andeuten. Es ergibt sich jedoch ein völlig anderes Bild als für Invalidenquoten, insbesondere auch wegen der Prämiensumme als Abszisse an Stelle der Personenjahre. Man erkennt, dass fast alle Risiken (für eine kleine Belegschaft) auf dem 100%-Niveau 'starten', während der weitere Verlauf sehr diffus ist.

Abbildungen 7.8-7.10: Tariffaktoren Wir erkennen klar, dass es mit steigender Risikoklasse rascher möglich ist, mit mehr Prämie auf einen besseren Tariffaktor zu gelangen, sofern kein Schaden produziert wird. Für Risikoklasse 3 etwa ergibt sich der Tariffaktor 40% etwa bei 1.5 Mio. Prämiensumme, in Risikoklasse 1 erst ab 3.8 Mio. CHF.

Auch einige kleinere Kollektive (mit niedrigerer Prämie) verursachen grosse Schäden, so dass sie trotz geringerem Credibility-Gewicht entsprechend hoch tarifiert werden.

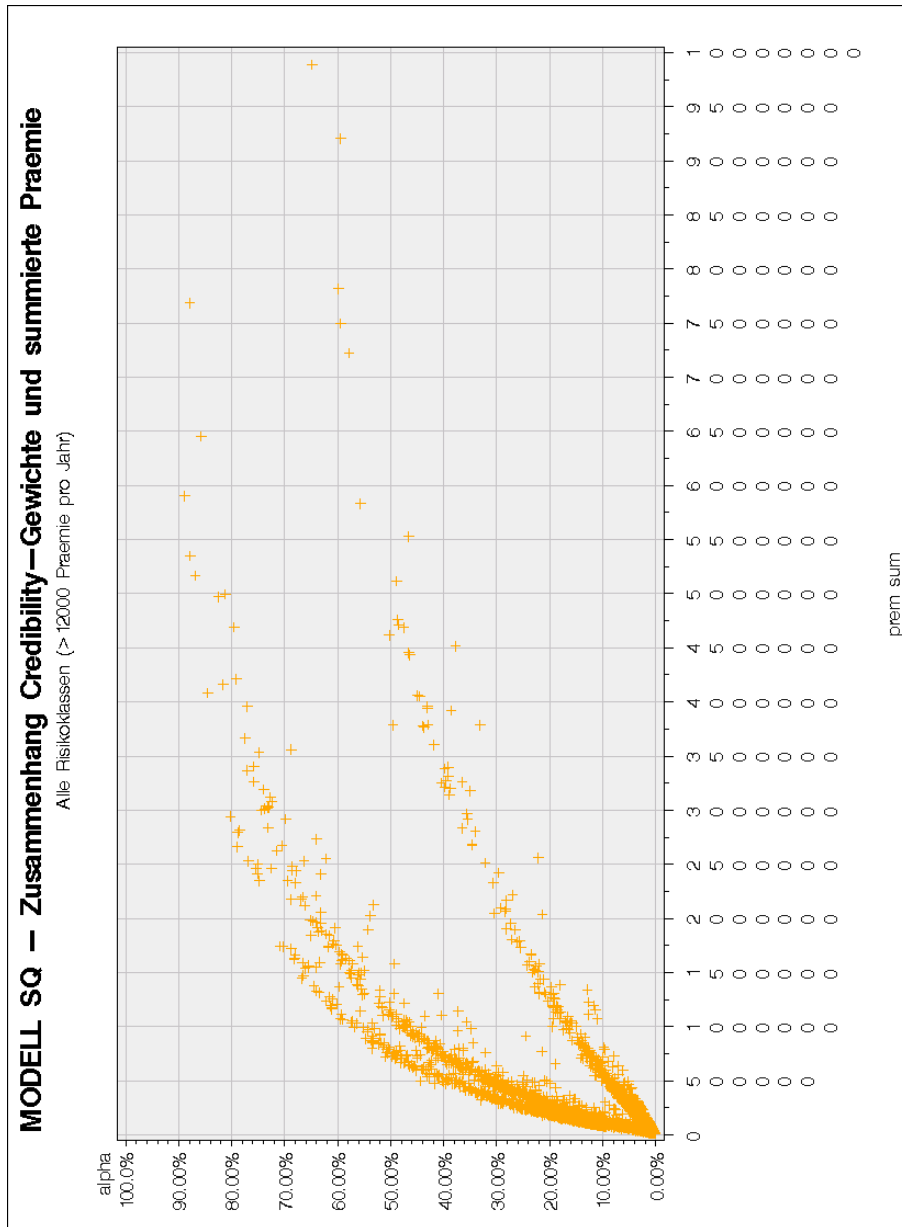


Abbildung 7.6: Credibility-Gewichte nach Prämiensumme

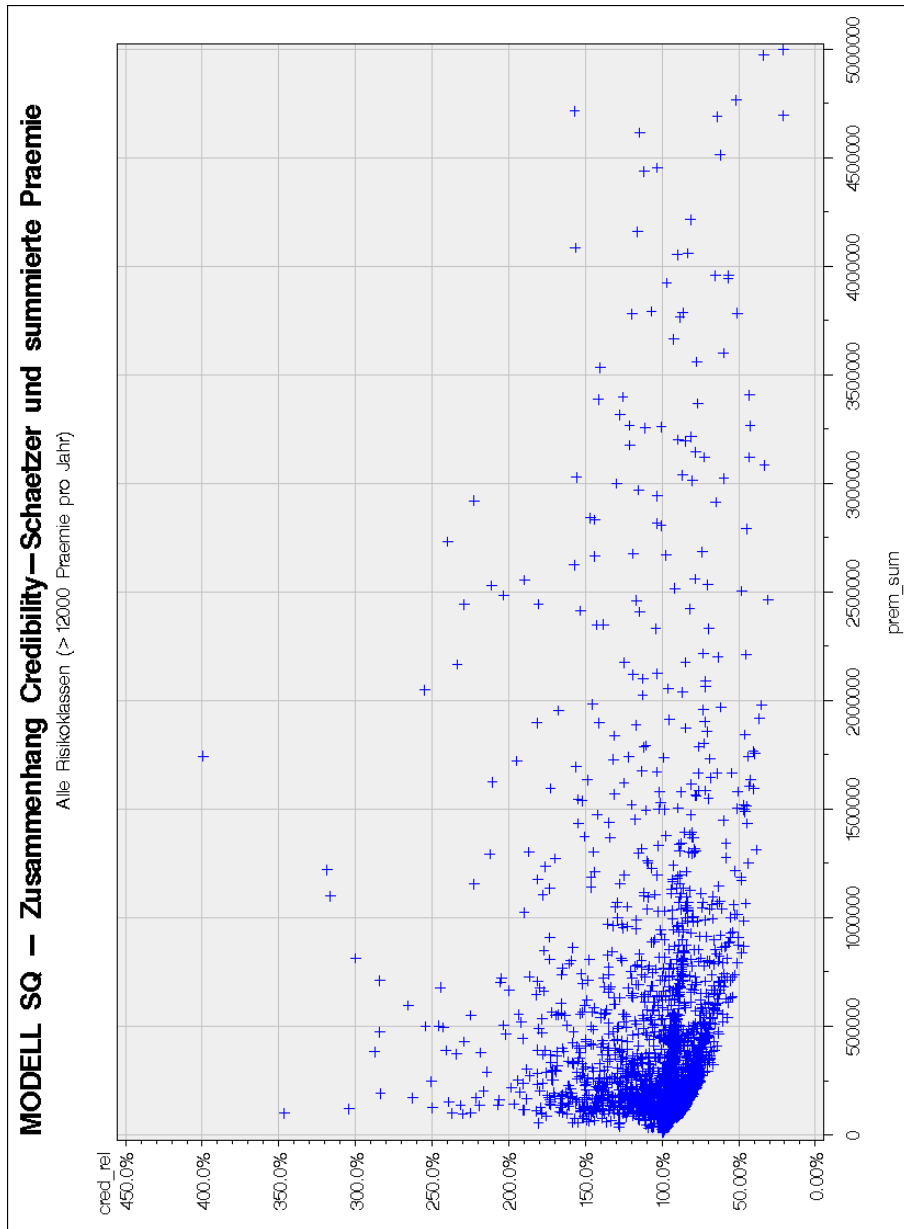


Abbildung 7.7: Credibility-Schätzer nach Prämiensumme

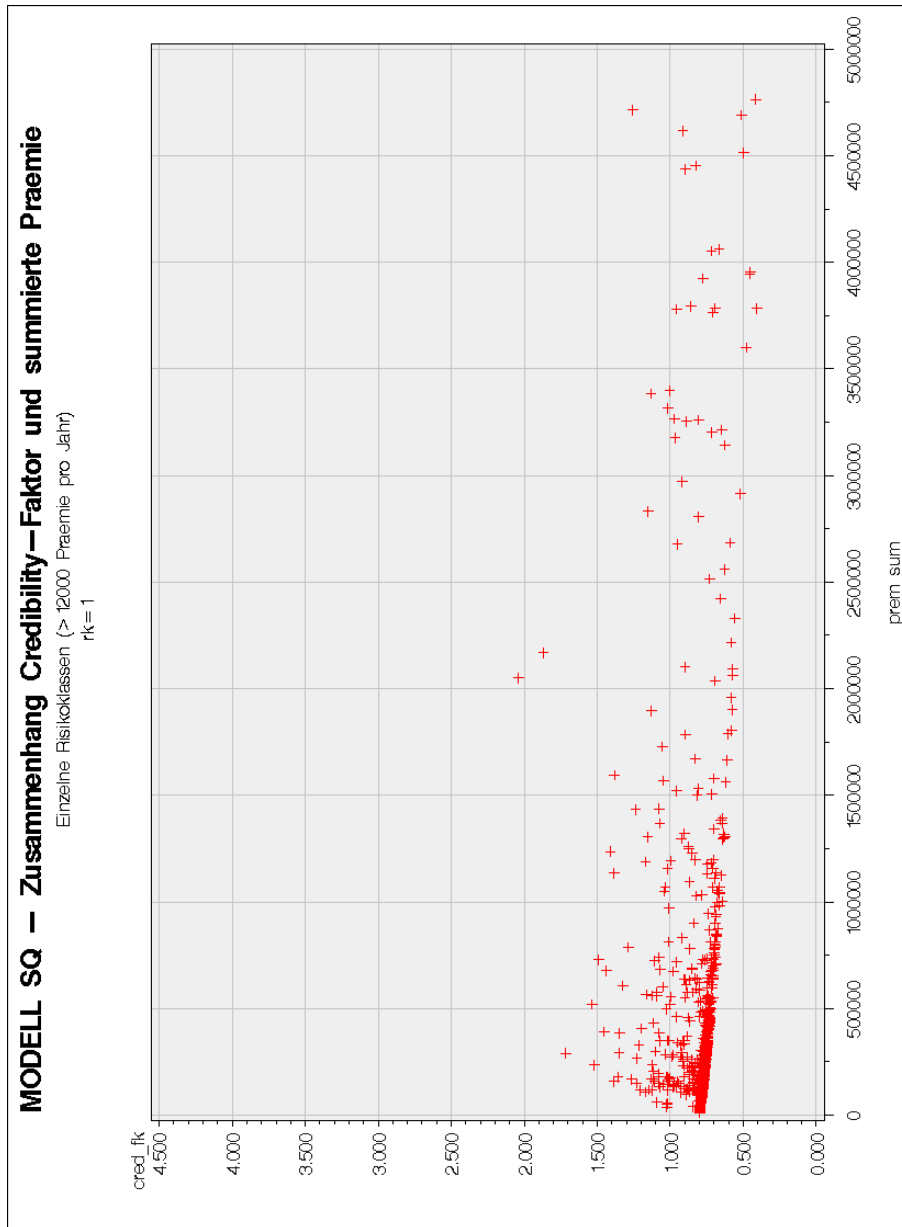


Abbildung 7.8: Credibility-Faktor der Risikoklasse 1 nach Prämien­summe

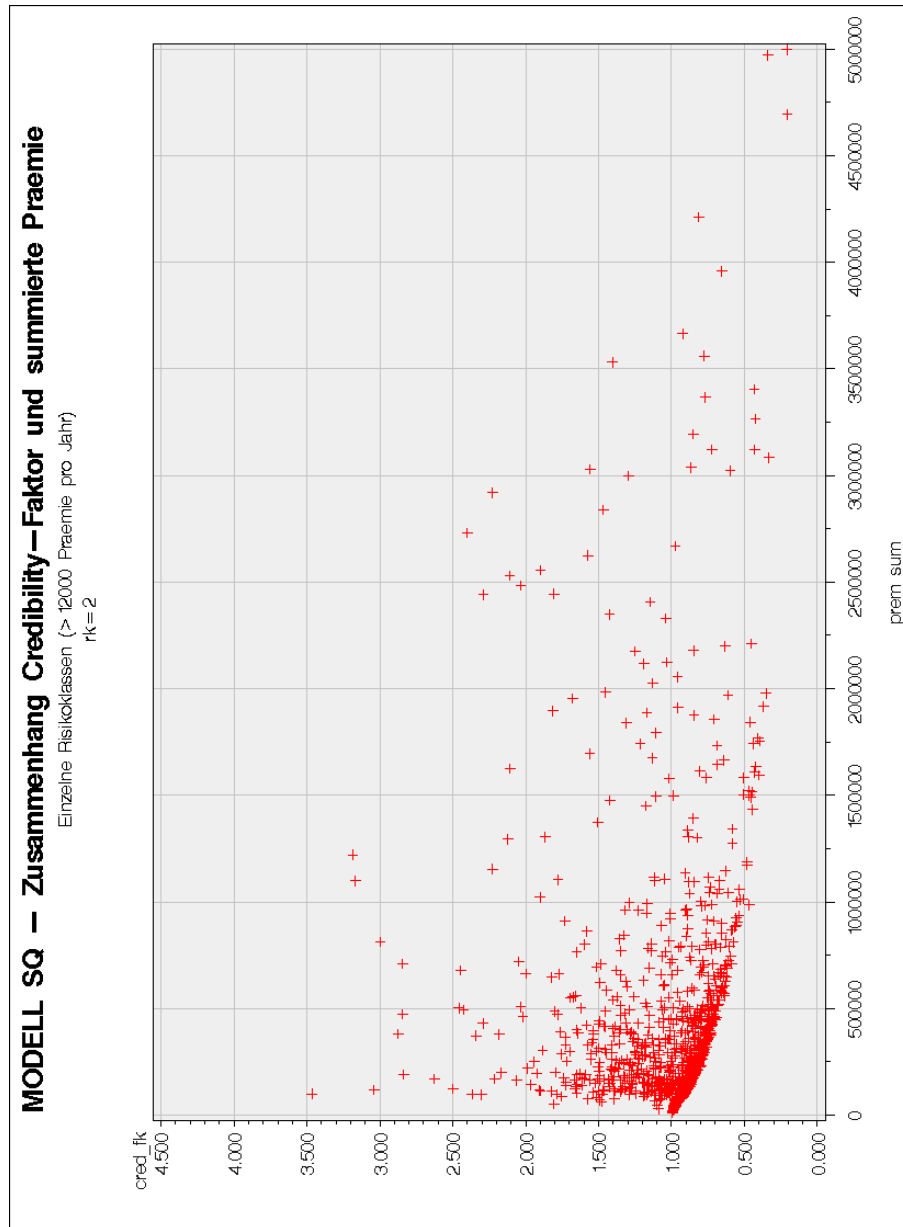


Abbildung 7.9: Credibility-Faktor der Risikoklasse 2 nach Prämiensumme

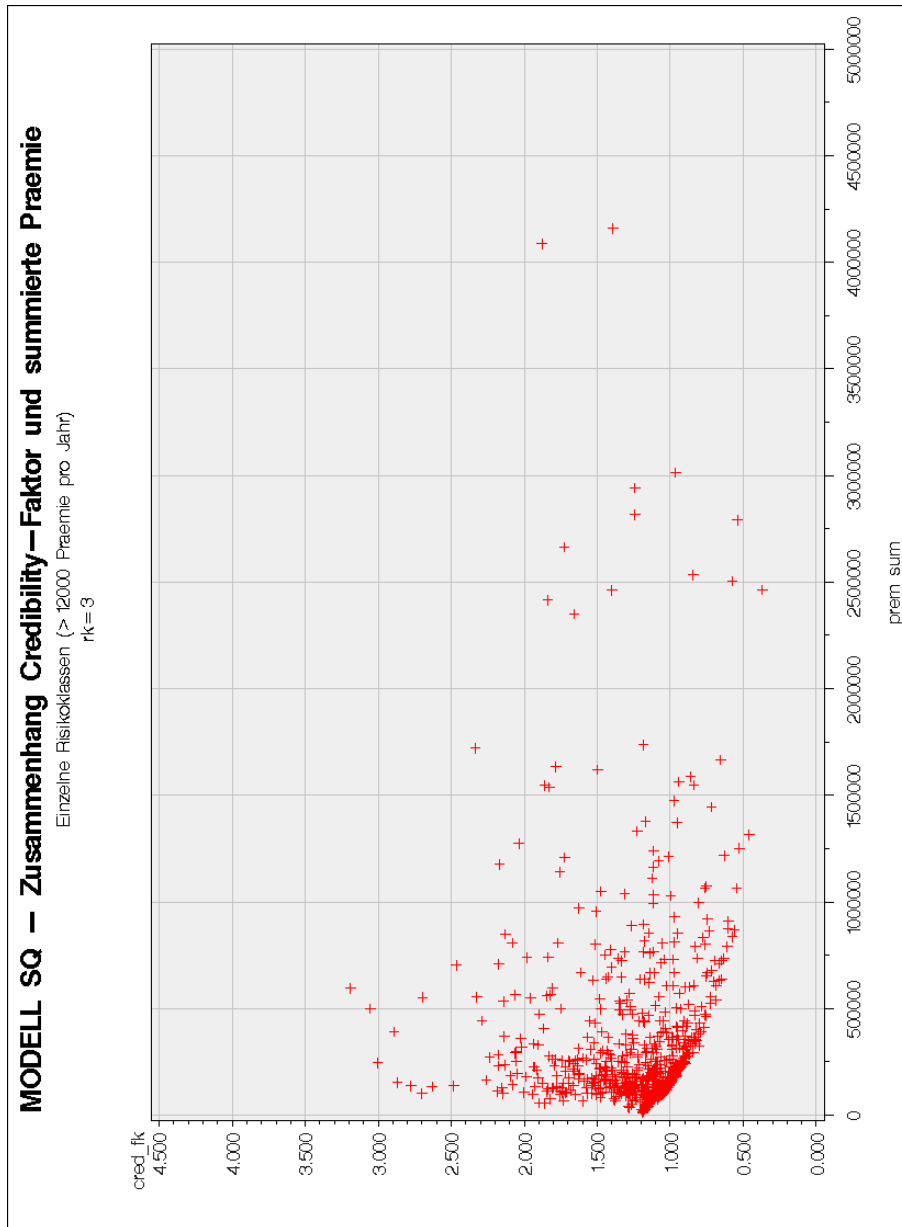


Abbildung 7.10: Credibility-Faktor der Risikoklasse 3 nach Prämiensumme

7.3 Gewichtetes Invalidenquoten-Modell

Für ein drittes Credibility-Modell führen wir in Kapitel 7.3.1 die Motivation auf und fahren in Kapitel 7.3.2 weiter mit den formalen Modellannahmen und ihrer Erklärung. Kapitel 7.3.3 behandelt die konkreten Resultate.

An dieser Stelle merken wir an, dass auch das hier präsentierte gewichtete Invalidenquoten-Modell einer a priori-Korrektur bedarf, wie sie in Kapitel 8 erklärt wird. Diese ist für gewichtete Invalidenquoten jedoch nicht leicht umsetzbar.

7.3.1 Motivation

Wir haben in den vorangehenden Modellen die Invalidenquote sowie die Schadenquote betrachtet und einige Unterschiede festgestellt. Aus diesen Erkenntnissen erwächst die natürliche Frage nach der Kombination beider Modelle. Durchaus denkbar wäre hierbei die Möglichkeit, die beiden resultierenden Credibility-Schätzer linear zu kombinieren, und zwar als gewichtetes Mittel mit Gewichten proportional zur jeweiligen Präzision. Für Credibility-Schätzer bedeutet dies, dass man die Gewichte proportional zum quadratischen Verlust wählen sollte.

Der Nachteil des Invalidenquoten-Modells ist die gleiche Behandlung von Kollektiven, die systematisch grosse Schäden oder systematisch kleine Schäden pro Ereignis verursachen. Das Schadenquoten-Modell bringt dafür aufgrund der hohen Variabilität der Schadenhöhen kleinere Credibility-Gewichte hervor. Ein einzelner Grossschaden kann zudem weitreichenden Einfluss haben.

Den Nachteil von Schadenquoten kann man etwas entschärfen, indem man Schadenhöhen-Kategorien bildet und statt der effektiven Höhe eines eingetretenen Schadens den Erwartungswert der zugehörigen Kategorie verwendet. Dies kann dadurch erreicht werden, dass man Invaliditätsfälle nicht wie gewohnt einzeln zählt, sondern jedem Fall gemäss seiner Schadenhöhen-Kategorie ein entsprechendes Gewicht zuweist. Wir verwenden nachfolgend ein solches Gewichtungsschema, ohne genauer auf die Gewichtung einzugehen. Anschliessend eine *gewichtete Invalidenquote* zur Tarifierung beizuziehen ist also ein Weg, um das Invalidenquoten- und Schadenquoten-Modell zu kombinieren.

Wir betrachten also an Stelle der Anzahl der beobachteten Invaliden X_{ij} des Risikos i im Jahr j die Anzahl der beobachteten *gewichteten* Invaliden X_{ij}^w . So gelangen wir zur *gewichteten* Invalidenquote q_{ij}^{invw} des Risikos i im Jahr j mit

$$q_{ij}^{invw} := \frac{X_{ij}^w}{vt_{ij}}.$$

Grundlage bildet das analoge Credibility-Modell der Invalidenquoten aus Kapitel 7.1.

7.3.2 Formales Modell

Für die Risiken $i \in \{1, \dots, I\}$ der Risikoklassen $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ und Jahre $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt dieselbe Notation wie im analogen Kapitel 7.1.2 für ungewichtete Invalidenquoten mit der Ausnahme

X_{ij}^w Anzahl beobachtete *gewichtete* Invalide des Risikos i im Jahr j

und den entsprechend angepassten Formeln

$$f_{ij} = \frac{\sum_{k \in r(i)} X_{kj}}{\sum_{k \in r(i)} vt_{kj}} \quad (7.17)$$

$$R_{ij} = \frac{X_{ij}}{\mu_{ij}}. \quad (7.18)$$

Wieder gelten implizit die globalen Annahmen 6.1 und 6.4 auf den Seiten 63 und 65, und wir gelangen zu den fast identischen Modellannahmen:

Modellannahmen 7.3 (Bühlmann-Straub auf standardisierte gewichtete Invalidenquoten) Risiko $i \in \{1, \dots, I\}$ der Risikoklasse $r(i) \in \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3\}$ sei charakterisiert durch sein individuelles Risikoprofil ϑ_i , welches Realisation einer Zufallsvariable Θ_i ist. Gegeben sei weiter ein Beobachtungsvektor $\underline{R}_i^T = (R_{i1}, \dots, R_{in})$, $n \in \mathbb{N}$, und es gelten nebst (7.2), (7.3), (7.17) und (7.18):

i) Bedingt, gegeben Θ_i , sind $\{R_{ij} : j = 1, \dots, n\}$ unabhängig und

$$\begin{aligned} E[R_{ij}|\Theta_i] &= \mu(\Theta_i) \\ \text{Var}(R_{ij}|\Theta_i) &= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\mu_{ij}} \end{aligned} \quad (7.19)$$

mit Strukturparameter.

ii) Die Paare $(\Theta_i, \underline{R}_i)_i$ sind unabhängig, und $(\Theta_i)_i$ unabhängig und identisch verteilt.

Für die Strukturparameter gilt $E[\mu(\Theta_i)] = E[R_{ij}] = 1$, $\sigma_{r(i)}^2 = E[\sigma^2(\Theta_i)]$ und $\tau_{r(i)}^2 = \text{Var}(\mu(\Theta_i))$.

Die Wahl des Volumenmasses rechtfertigt sich aus demselben Grund wie unterhalb der Modellannahmen (7.1) beschrieben. Diese Modellannahmen resultieren ferner natürlich im selben Schätzer (7.6), und wir verwenden analog die Strukturparameter-Schätzungen (7.7) und (7.8). Für den schlussendlichen Tariffaktor erhalten wir wiederum (7.10).

7.3.3 Resultate

Der SAS-Programmcode zur Berechnung der hier aufgeführten Resultate ist am Ende dieses Dokuments in Teil IV zu finden.

Zwischenergebnisse

Wir führen nachfolgend die Ergebnisse der Makros `apfactmu`, `rbvectsuf`, `sigma2`, `tau2` und `makecred` auf. Alle Kommentare verlaufen analog zu den Modellen mit Invaliden- (Seite 75) oder Schadenquote (Seite 88).

\mathcal{R}	$f_{\mathcal{R},1}$	$f_{\mathcal{R},2}$	$f_{\mathcal{R},3}$	$f_{\mathcal{R},4}$	$f_{\mathcal{R},5}$	$f_{\mathcal{R},6}$
1	0.0053	0.0049	0.0059	0.0051	0.0048	0.0032
2	0.0112	0.0097	0.0100	0.0088	0.0077	0.0044
3	0.0157	0.0166	0.0147	0.0133	0.0114	0.0071

Tabelle 7.21: Durchschnittliche gewichtete Invalidenquoten

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\mu_{\mathcal{R},1}$	0.0280	0.160
1	$\mu_{\mathcal{R},6}$	0.0263	0.109
2	$\mu_{\mathcal{R},1}$	0.0765	0.317
2	$\mu_{\mathcal{R},6}$	0.0441	0.158
3	$\mu_{\mathcal{R},1}$	0.1439	0.555
3	$\mu_{\mathcal{R},6}$	0.0848	0.251

Tabelle 7.22: A priori erwartete Anzahl gewichtete Invalide

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$R_{\mathcal{R},1}$	1.054	6.43
1	$R_{\mathcal{R},6}$	0.996	8.10
2	$R_{\mathcal{R},1}$	1.077	4.50
2	$R_{\mathcal{R},6}$	0.982	5.28
3	$R_{\mathcal{R},1}$	1.027	3.05
3	$R_{\mathcal{R},6}$	1.000	3.98

Tabelle 7.23: Gewichtete Statistik der Beobachtungsvektorkomponenten

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$R_{\mathcal{R}}$	0.9938	2.819
2	$R_{\mathcal{R}}$	0.9917	1.836
3	$R_{\mathcal{R}}$	0.9908	1.347

Tabelle 7.24: Gewichtete suffiziente Statistik

\mathcal{R}	$\widehat{\sigma}_{\mathcal{R}}^2$
1	1.331
2	1.275
3	1.296

Tabelle 7.25: Geschätzte innere Varianz je Risikoklasse

\mathcal{R}	$\widehat{\tau}_{\mathcal{R}}^2$
1	0.1815
2	0.1680
3	0.1119

Tabelle 7.26: Geschätzte äussere Varianz je Risikoklasse

\mathcal{R}	$\kappa_{\mathcal{R}}$
1	7.33
2	7.59
3	11.58

Tabelle 7.27: Credibility-Koeffizient je Risikoklasse

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\alpha_{\mathcal{R}}$	0.215	0.24
2	$\alpha_{\mathcal{R}}$	0.284	0.25
3	$\alpha_{\mathcal{R}}$	0.284	0.25

Tabelle 7.28: Gewichtete Statistik der Credibility-Gewichte je Risikoklasse

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	1.00003	0.07016
2	$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	0.99815	0.09460
3	$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	0.99870	0.08466

Tabelle 7.29: Statistik der Credibility-Schätzer je Risikoklasse

\mathcal{R}	var	min	max	mean	std
1	$\widehat{\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	0.34	1.82	0.794	0.183
2	$\widehat{\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	0.35	2.63	1.021	0.261
3	$\widehat{\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	0.54	2.84	1.209	0.301
alle	$\widehat{\widehat{t(\Theta_{\bullet})}}$	0.34	2.84	1.010	0.297

Tabelle 7.30: Gewichtete Statistik der Tariffaktoren je Risikoklasse

Illustrierte Endresultate

In diesem Abschnitt präsentieren wir zum dritten Mal Abbildungen zu den resultierenden Credibility-Gewichten, Credibility-Schätzern und Tariffaktoren in Abhängigkeit der Anzahl Personenjahre über dem Beobachtungszeitraum und verweisen für Kommentare auf die entsprechenden Stellen im Invalidenquoten- (Seite 75) und Schadenquoten-Modell (Seite 88).

Abbildung 7.11: Credibility-Gewichte Aufgrund der Konstellation der äußeren Varianzschätzer und geschätzten gewichteten Invalidenquoten-Mitteln fallen die Zweige der zweiten und dritten Risikoklasse nahezu zusammen (vgl. Tabelle 7.27). Ein Credibility-Gewicht von 20% erreichen Kollektive in Risikoklasse 1 ab 350 Personenjahren, für die anderen Klassen bereits ab 250 Personenjahren. 90% Credibility sind praktisch nicht zu erreichen - für 80% bedarf es 5500 Personenjahre in Risikoklasse 1 und 3500 Personenjahre in Risikoklasse 2 und 3.

Abbildung 7.12: Credibility-Schätzer Die Grafik gestaltet sich analog zum ungewichteten Invalidenquoten-Modell, wobei hier die Stränge der drei Risikoklassen näher zusammen liegen und ähnlichere Steigung besitzen.

Abbildungen 7.13-7.15: Tariffaktoren Auch diese Interpretation verläuft analog zum ungewichteten Invalidenquoten-Modell. Jedoch liegen die Stränge (für einzelne gewichtete Schadenfälle) bedeutend näher zusammen: Das gewichtete Invalidenquoten-Modell diversifiziert weniger stark als das reine Invalidenquoten-Modell.

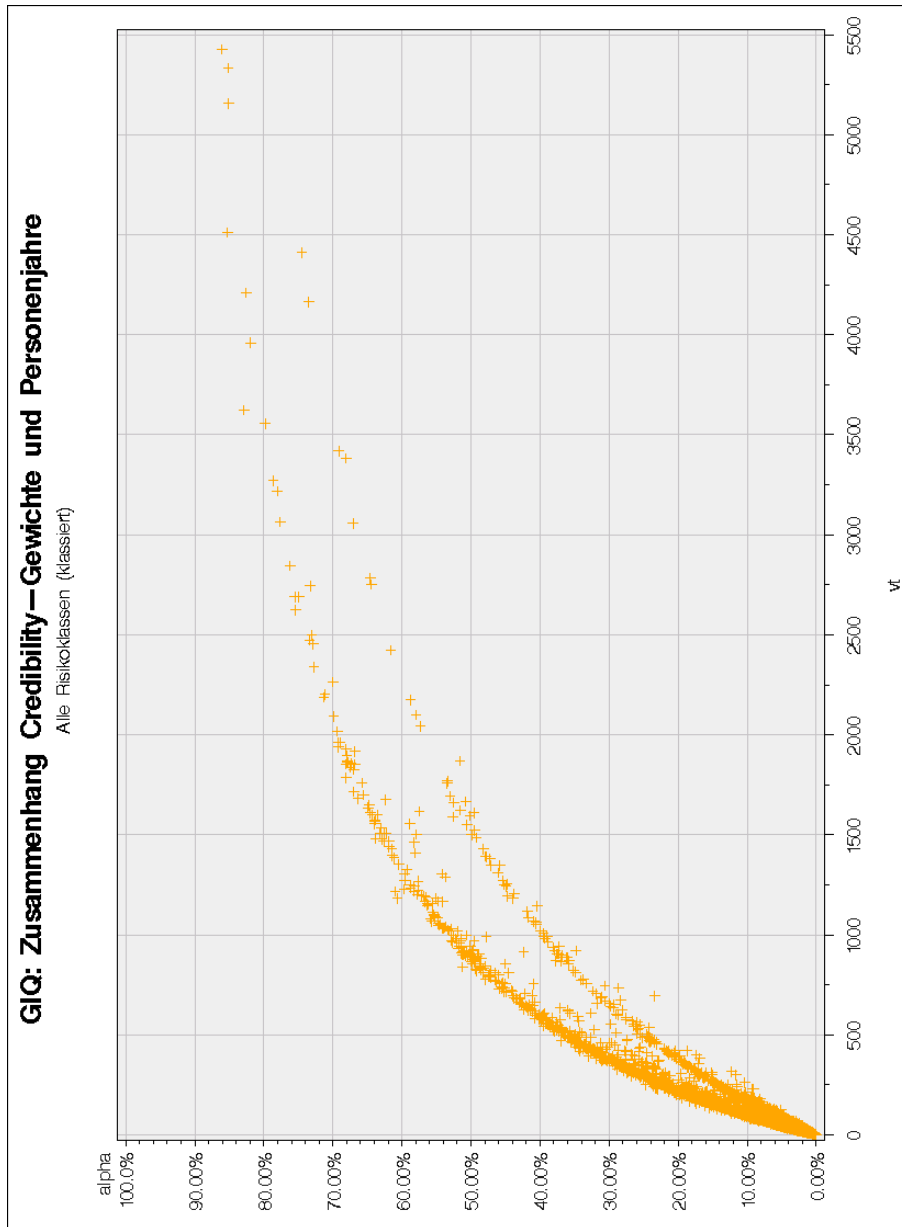


Abbildung 7.11: Credibility-Gewichte nach Personenjahren

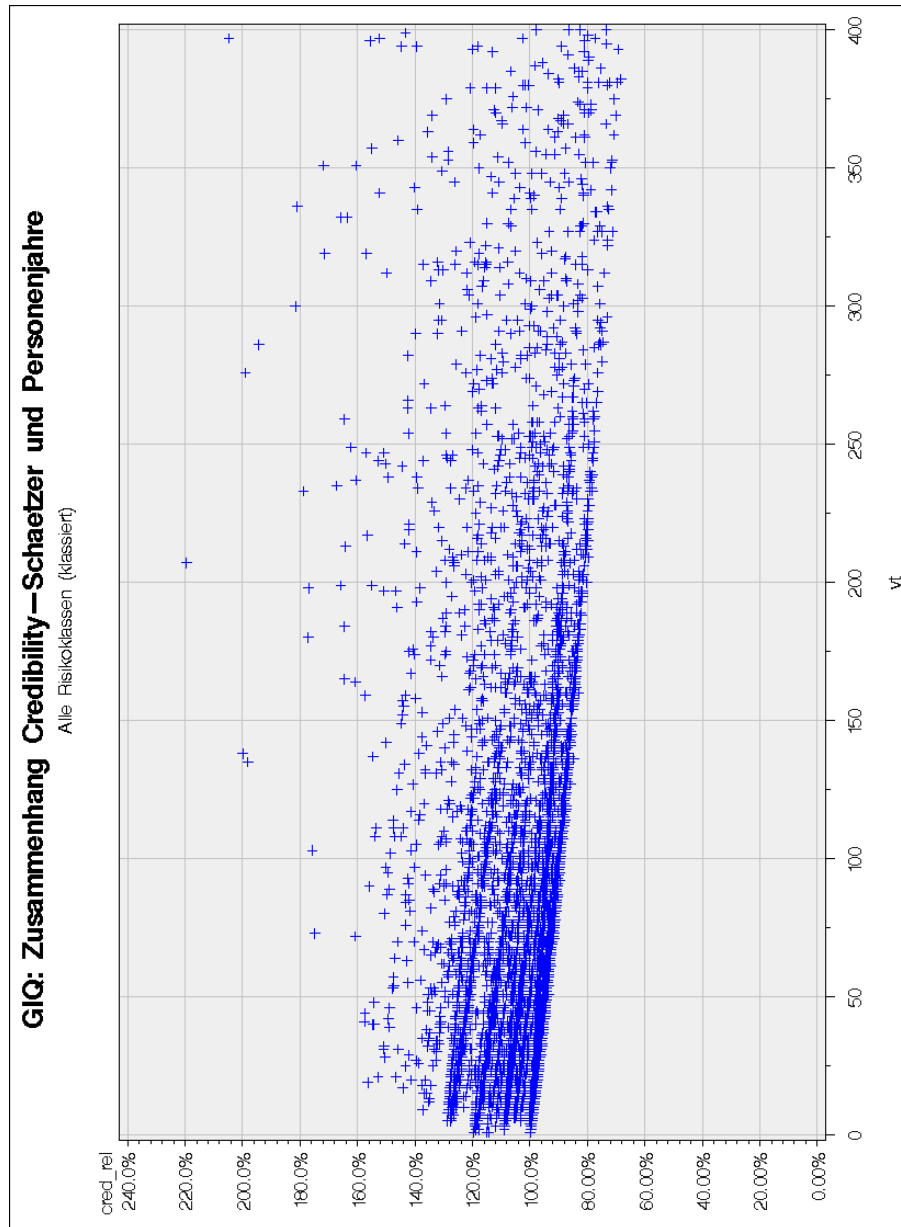


Abbildung 7.12: Credibility-Schätzer nach Personenjahren

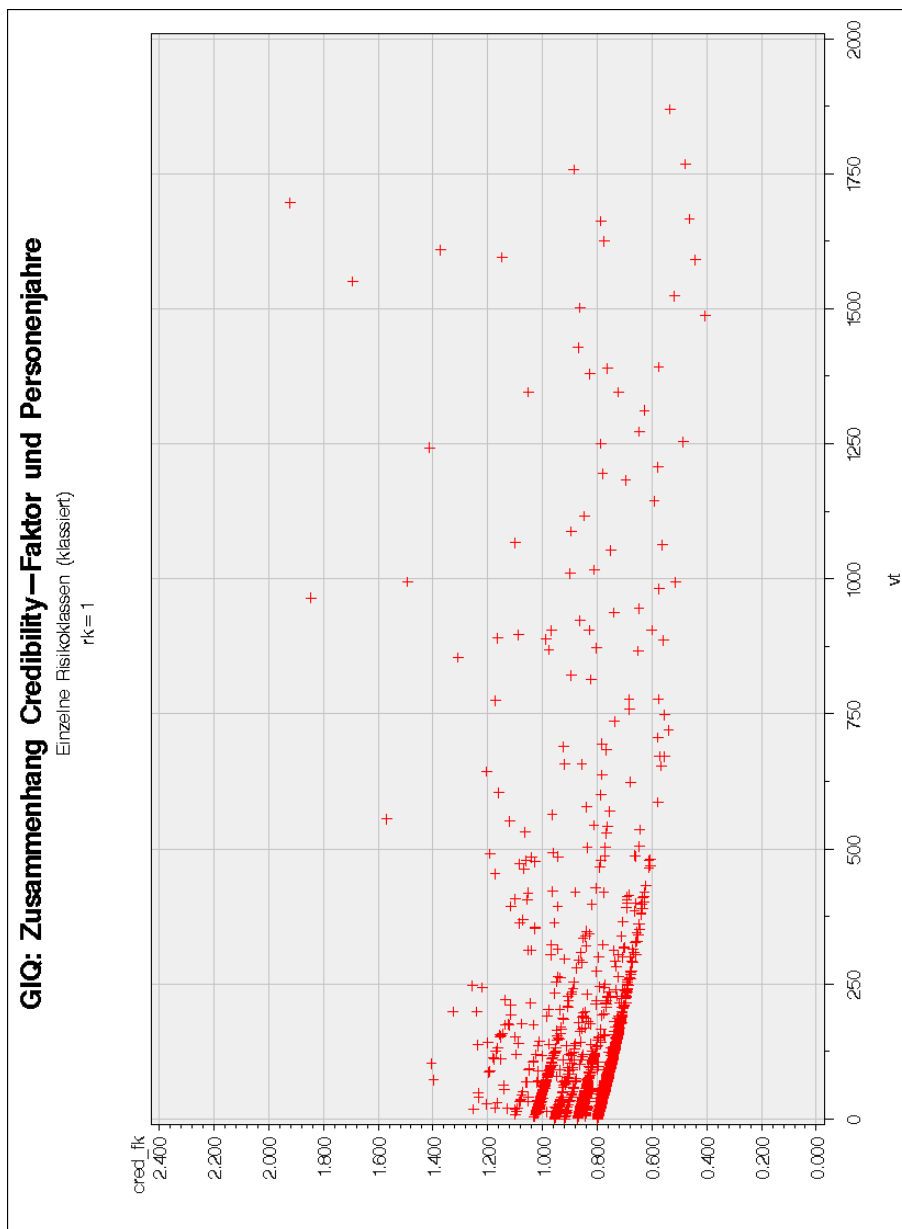


Abbildung 7.13: Credibility-Faktor der Risikoklasse 1 nach Personenjahren

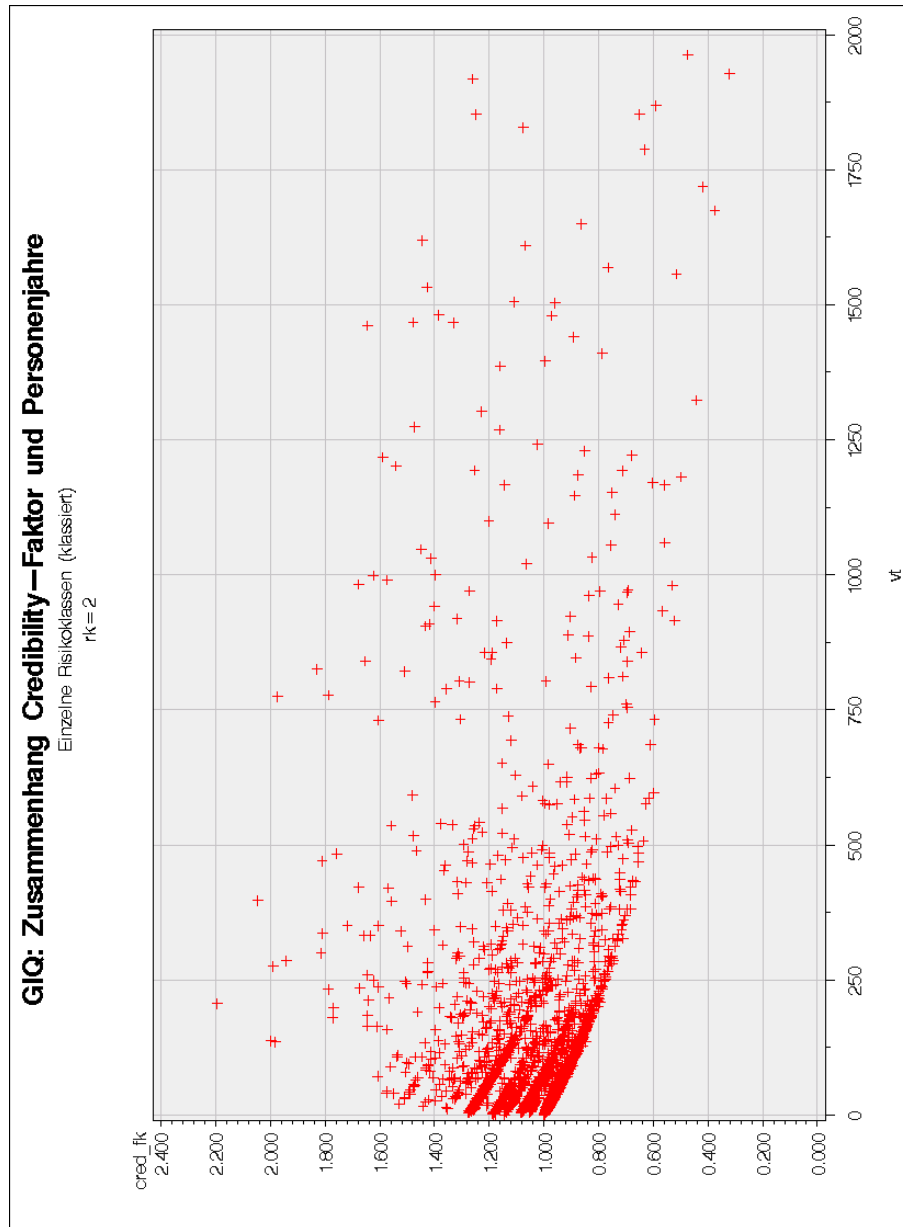


Abbildung 7.14: Credibility-Faktor der Risikoklasse 2 nach Personenjahren

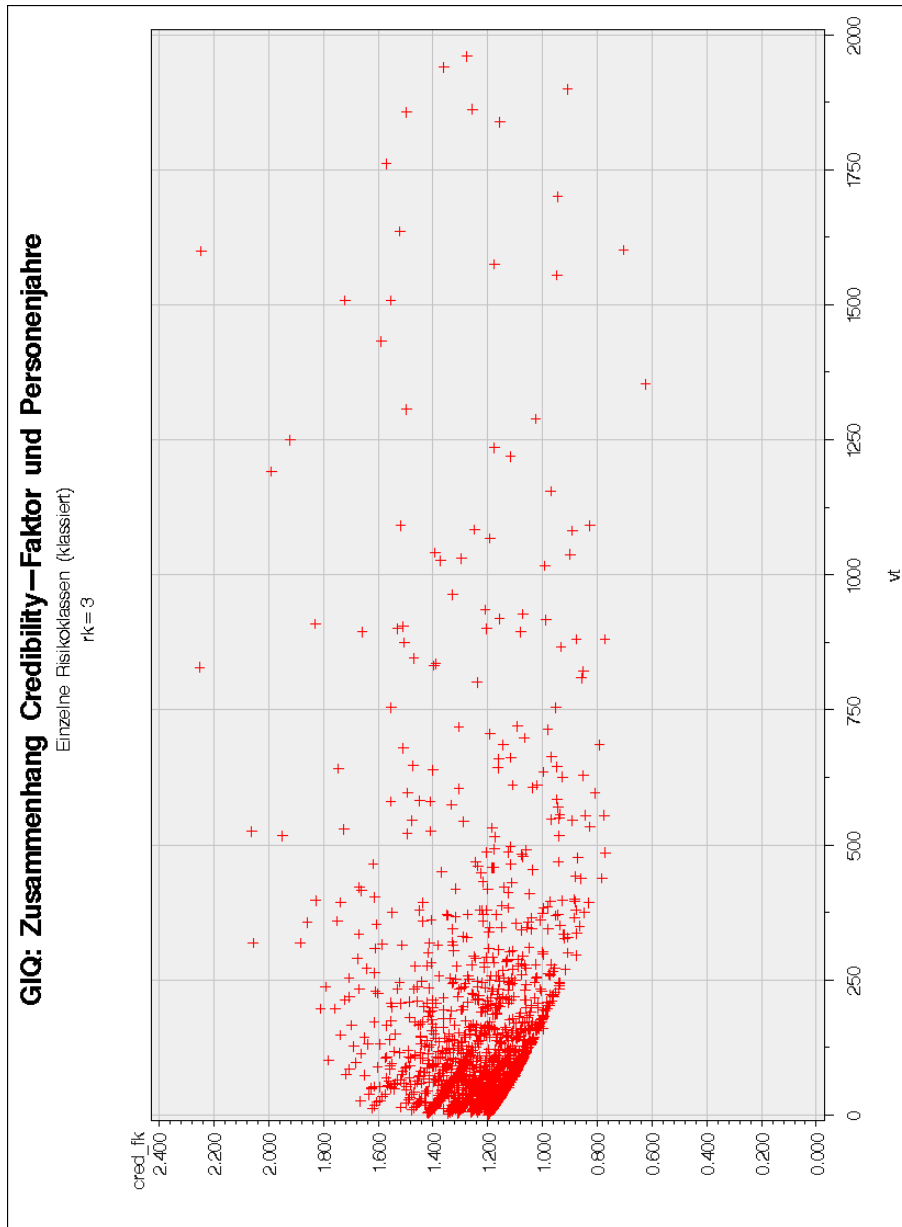


Abbildung 7.15: Credibility-Faktor der Risikoklasse 3 nach Personenjahren

7.4 Schadenraten-Modell

Das Schadenraten-Modell kann wie in Kapitel 8 beschrieben aufgrund von a priori-Kenntnis noch verbessert werden.

7.4.1 Motivation

Die Frage nach der Schadenhöhe motiviert auch einen anderen Ansatz, wo die Schadenssumme eines zu tarifierenden Kollektivs seiner Versichertenzahl (an Stelle der Prämie wie im Schadenquoten-Modell) gegenübergestellt wird. Diese *Schadenrate* des Kollektivs wird sowohl durch die Anzahl der Invaliditätsfälle wie auch durch deren Schadenhöhe beeinflusst und kann so gesehen in gewisser Weise ebenfalls als Kombination der Invalidenquoten- und Schadenquoten-Modelle interpretiert werden - insbesondere wenn man den Ansatz verfolgt, dass gewisse Kollektive systematisch teurere Fälle verursachen, im Mittel die Schadenhöhe über dem Gesamtbestand aber gleichverteilt ist.

Ein weiterer praktischer Vorteil könnte sein, dass die Prämie nicht benötigt wird (und man sich ferner die Entscheidung erspart, welche Prämie zu verwenden ist) - die Versichertenzahl ist womöglich eine zugänglichere Grösse als die verrechnete Prämie, zumindest steht sie bereits vor der Anwendung des Standardtarifs fest. Im Gegenzug ist eine Korrektur der 'doppelten Bestrafung und Belohnung' angezeigt, die im Schadenquoten-Modell nicht nötig ist (weil dort die 100%-Prämie nach Standardtarif die Bestandesstruktur bereits berücksichtigt, siehe Kapitel 8).

7.4.2 Formales Modell

Wir verwenden im Schadenraten-Modell dieselbe Notation wie für Schadenquoten (siehe Kapitel 7.2.2 auf Seite 83) mit der Ergänzung beziehungsweise Anpassung

vt_{ij}	Anzahl aktive Versicherte des Risikos i im Jahr j
f_{ij}	Durchschnittliche Schadenrate der Risikoklasse $r(i)$ im Jahr j .

Dann gelten die veränderten Zusammenhänge

$$f_{ij} = \frac{\sum_{k \in r(i)} ss_{kj}}{\sum_{k \in r(i)} vt_{kj}} \quad (7.20)$$

$$\mu_{ij} = f_{ij} \cdot vt_{ij} \quad (7.21)$$

mit denselben Anmerkungen wie im Schadenquoten-Modell.

Mit den globalen Annahmen im Hintergrund folgt mittels Bühlmann-Straub angewandt auf unsere Situation:

Modellannahmen 7.4 (Bühlmann-Straub auf standardisierte Schadenraten) Risiko $i \in \{1, \dots, I\}$ der Risikoklasse $r(i) \in \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3\}$ sei charakterisiert durch sein individuelles Risikoprofil ϑ_i , welches Realisation einer Zufallsvariable Θ_i ist. Gegeben sei weiter ein Beobachtungsvektor $\underline{R}_i^T = (R_{i1}, \dots, R_{in})$, $n \in \mathbb{N}$, und es gelten nebst (7.11), (7.15), (7.20) und (7.21):

i) Bedingt, gegeben Θ_i , sind $\{R_{ij} : j = 1, \dots, n\}$ unabhängig und

$$\begin{aligned} E[R_{ij}|\Theta_i] &= \mu(\Theta_i) \\ \text{Var}(R_{ij}|\Theta_i) &= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\mu_{ij}}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

ii) Die Paare $(\Theta_i, \underline{R}_i)_i$ sind unabhängig, und $(\Theta_i)_i$ unabhängig und identisch verteilt.

Die Strukturparameterschätzer, der Credibility-Schätzer und Tariffaktor bleiben allesamt gleich und die Wahl des Volumenmasses rechtfertigt sich analog.

7.4.3 Resultate

Der SAS-Programmcode zur Berechnung der hier aufgeführten Resultate ist am Ende dieses Dokuments in Teil IV angefügt.

Wir führen die Ergebnisse auf, ohne sie weiter zu kommentieren. Die analogen Überlegungen wie im Invalidenquoten- und Schadenquoten-Modell haben Gültigkeit.

\mathcal{R}	$f_{\mathcal{R},1}$	$f_{\mathcal{R},2}$	$f_{\mathcal{R},3}$	$f_{\mathcal{R},4}$	$f_{\mathcal{R},5}$	$f_{\mathcal{R},6}$
1	919	777	1'085	734	559	503
2	1'084	986	1'035	846	778	398
3	1'704	1'815	1'639	1'374	988	668

Tabelle 7.31: Durchschnittliche Schadenraten

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\mu_{\mathcal{R},1}$	27'274	74'369
1	$\mu_{\mathcal{R},6}$	23'283	46'479
2	$\mu_{\mathcal{R},1}$	45'361	79'450
2	$\mu_{\mathcal{R},6}$	24'549	38'541
3	$\mu_{\mathcal{R},1}$	78'025	136'091
3	$\mu_{\mathcal{R},6}$	40'034	55'614

Tabelle 7.32: A priori erwartete Schadenssumme

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$R_{\mathcal{R},1}$	0.999	3.30
1	$R_{\mathcal{R},6}$	1.069	6.41
2	$R_{\mathcal{R},1}$	0.949	2.37
2	$R_{\mathcal{R},6}$	0.959	3.83
3	$R_{\mathcal{R},1}$	0.974	1.99
3	$R_{\mathcal{R},6}$	0.990	2.67

Tabelle 7.33: Gewichtete Statistik der Beobachtungsvektorkomponenten

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$R_{\mathcal{R}}$	0.9929	2.343
2	$R_{\mathcal{R}}$	0.9984	1.524
3	$R_{\mathcal{R}}$	0.9892	1.100

Tabelle 7.34: Gewichtete suffiziente Statistik

\mathcal{R}	$\widehat{\sigma}_{\mathcal{R}}^2$
1	703'857
2	405'945
3	347'096

Tabelle 7.35: Geschätzte innere Varianz je Risikoklasse

\mathcal{R}	$\widehat{\tau}_{\mathcal{R}}^2$
1	0.2489
2	0.2903
3	0.3195

Tabelle 7.36: Geschätzte äussere Varianz je Risikoklasse

\mathcal{R}	$\kappa_{\mathcal{R}}$
1	2.83 Mio.
2	1.40 Mio.
3	1.09 Mio.

Tabelle 7.37: Credibility-Koeffizient je Risikoklasse

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\alpha_{\mathcal{R}}$	0.190	0.18
2	$\alpha_{\mathcal{R}}$	0.299	0.20
3	$\alpha_{\mathcal{R}}$	0.417	0.23

Tabelle 7.38: Gewichtete Statistik der Credibility-Gewichte je Risikoklasse

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\widehat{\widehat{\mu}}(\Theta_{\mathcal{R}})$	1.00085	0.1072
2	$\widehat{\widehat{\mu}}(\Theta_{\mathcal{R}})$	1.00075	0.1960
3	$\widehat{\widehat{\mu}}(\Theta_{\mathcal{R}})$	0.99138	0.2556

Tabelle 7.39: Statistik der Credibility-Schätzer je Risikoklasse

\mathcal{R}	var	min	max	mean	std
1	$\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}$	0.424	1.602	0.786	0.170
2	$\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}$	0.386	2.776	0.986	0.294
3	$\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}$	0.392	4.062	1.211	0.434
alle	$\widehat{t(\Theta_{\bullet})}$	0.386	4.062	0.994	0.352

Tabelle 7.40: Gewichtete Statistik der Tariffaktoren je Risikoklasse

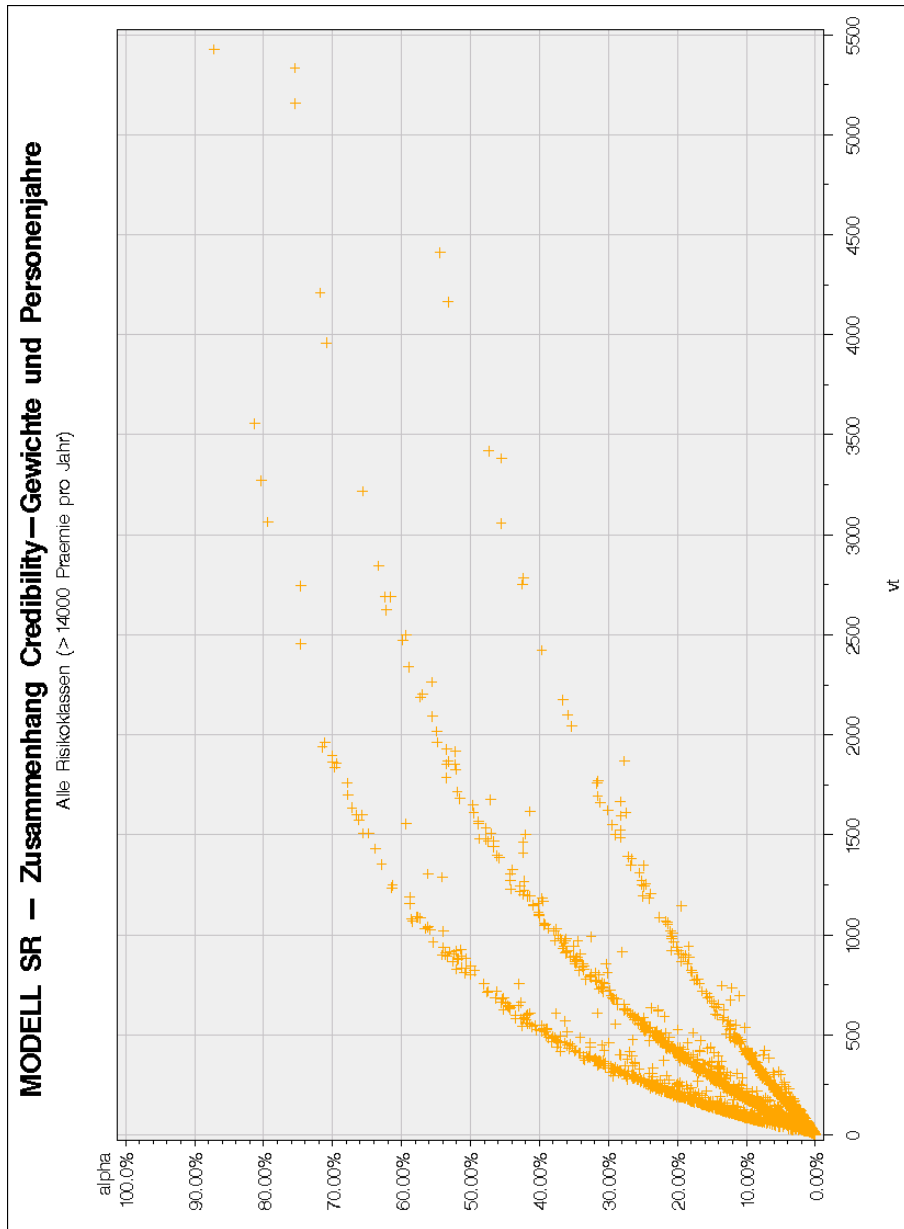


Abbildung 7.16: Credibility-Gewichte nach Personenjahren

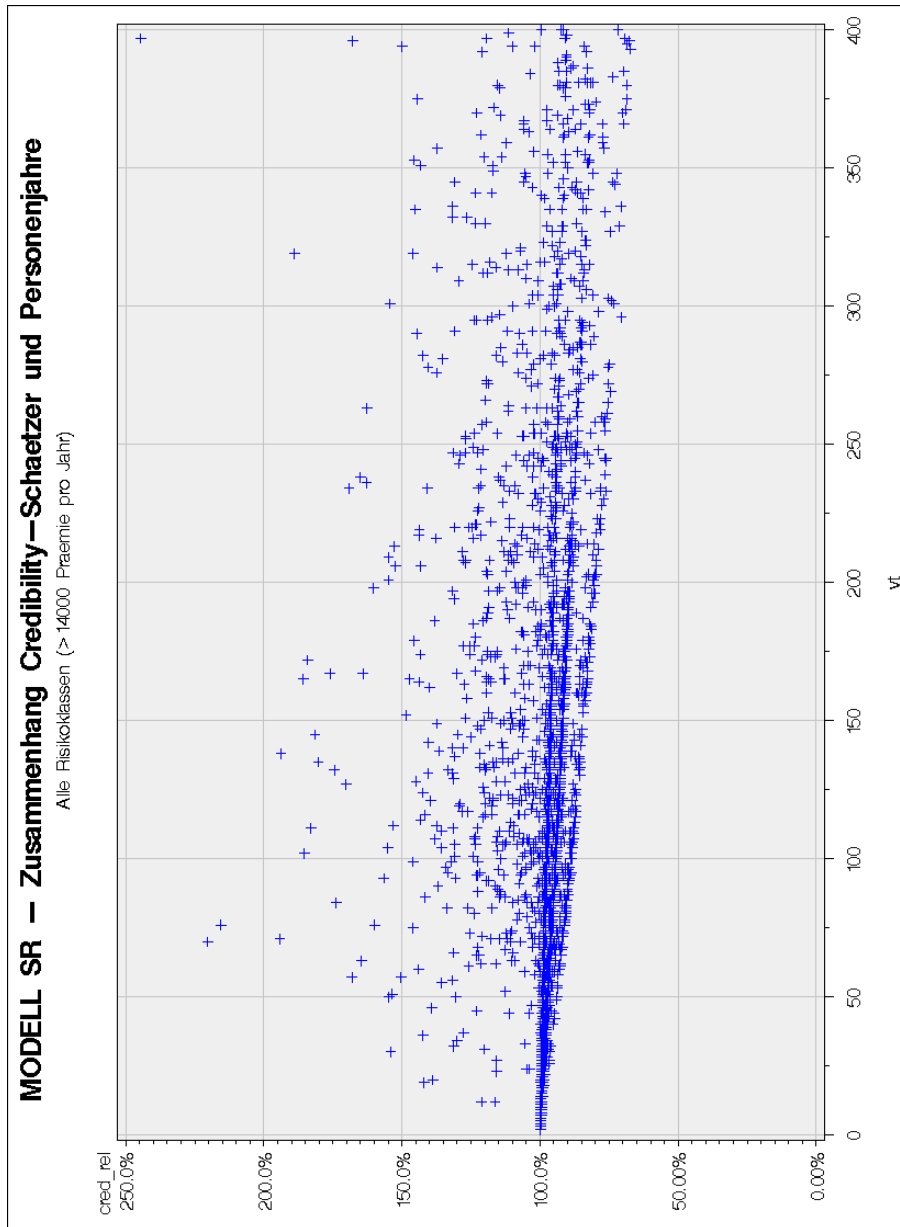


Abbildung 7.17: Credibility-Gewichte nach Personenjahren

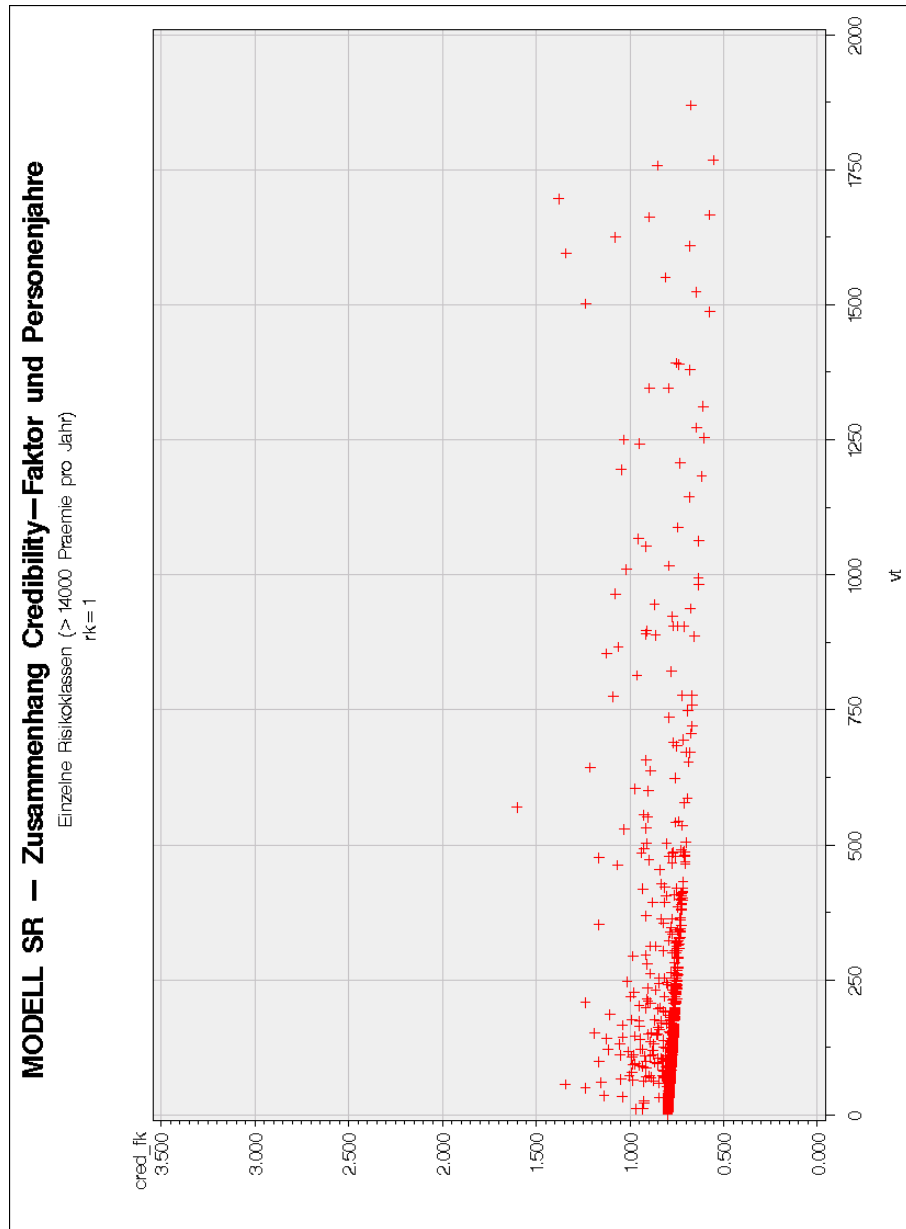


Abbildung 7.18: Credibility-Faktor der Risikoklasse 1 nach Personenjahren

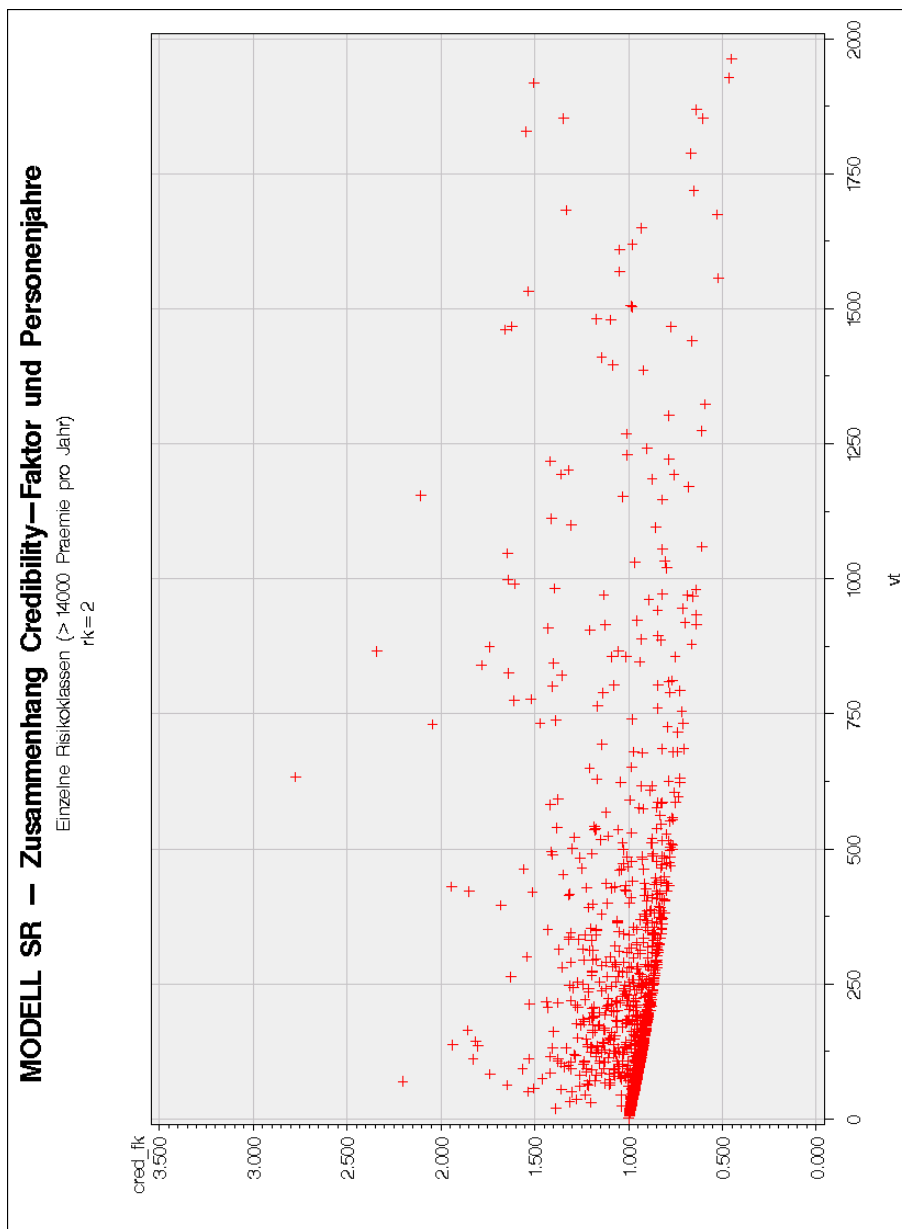


Abbildung 7.19: Credibility-Faktor der Risikoklasse 2 nach Personenjahren

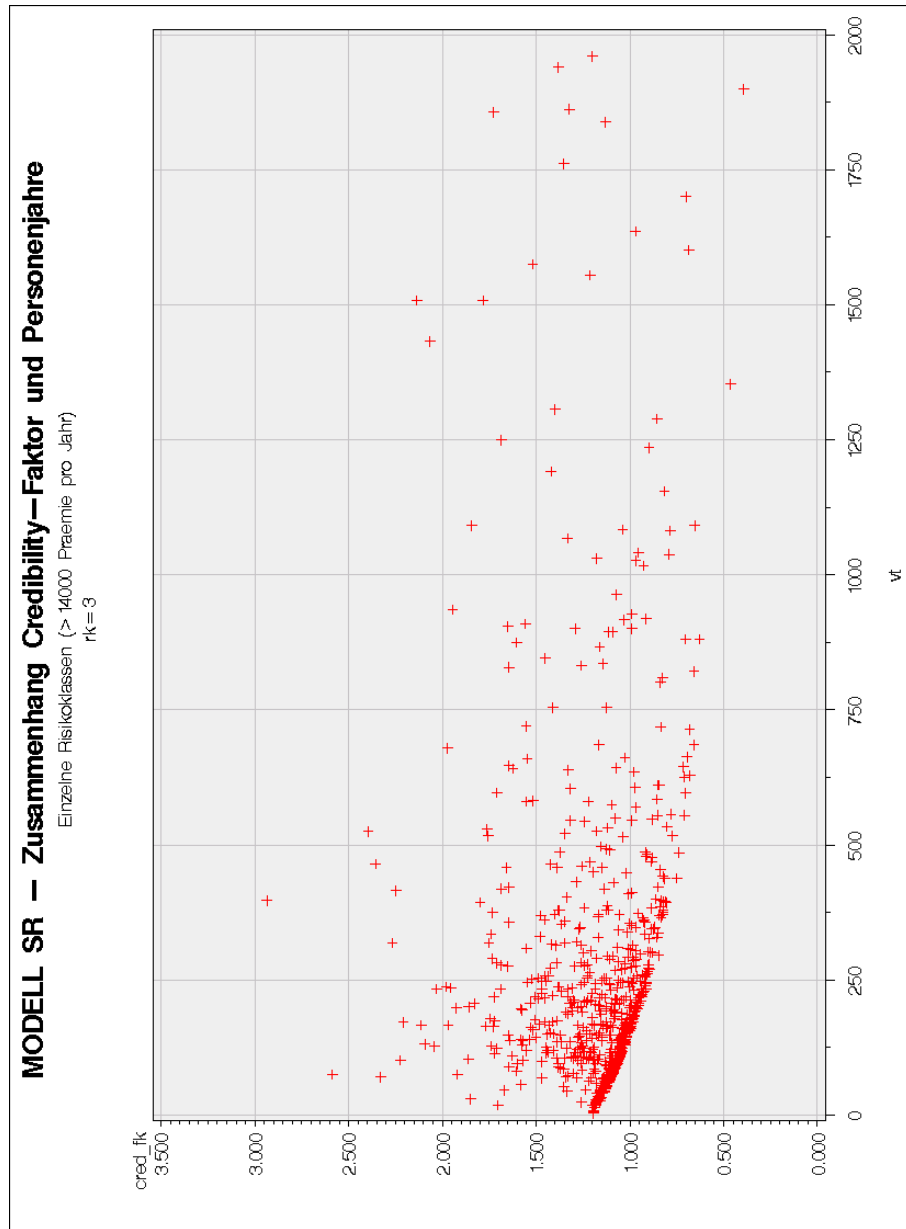


Abbildung 7.20: Credibility-Faktor der Risikoklasse 3 nach Personenjahren

7.5 Strukturparameterschätzung im evolutionären Modell

Im theoretischen Teil haben wir in Kapitel 5.5.2 ab Seite 54 ausgeführt, wie die Strukturparameterschätzung in unserem zeitinhomogenen Modell 5.1 mittels Regression vorgenommen werden kann.

Dieses Kapitel beschränkt sich exemplarisch auf die Berechnung der Strukturparameter im Datensatz des Invalidenquoten-Modells mittels Regression, um die resultierenden Schätzungen mit dem klassischen Schätzverfahren vergleichen zu können. Wir verwenden also die Beobachtungen, suffiziente Statistik und Volumenmasse aus Kapitel 7.1.

Mit der Notation aus Kapitel 5.5.2 erhalten wir die Schätzungen in Tabelle 7.41, welche qualitativ mit den Parametern aus dem Invalidenquoten-Modell gemäss klassischem Schätzverfahren verglichen werden.

\mathcal{R}	$\widehat{\sigma}_{\mathcal{R}}^{\text{IQ}}$	$\widehat{\tau}_{\mathcal{R}}^{\text{IQ}}$	$\widehat{\sigma}_{\mathcal{R}}^2$	$\widehat{\delta}_{\mathcal{R}}^2$	$\widehat{\tau}_{\mathcal{R}}^2$	$\widehat{\delta}_{\mathcal{R}}^{\prime 2}$	$\widehat{\tau}_{\mathcal{R}}^{\prime 2}$
1	0.943	0.564	0.914	0.342	0.675	0.039	0.769
2	0.787	0.389	0.983	0.312	0.656	0.066	0.703
3	0.836	0.162	0.839	0.458	0.264	0.004	0.324

Tabelle 7.41: Strukturparameterschätzer klassisch und mittels Regression

Es zeigt sich, dass das Regressionsverfahren ähnliche Schätzungen für die Varianz innerhalb der Risiken hervorbringt. Die qualitative Abweichung in der zweiten Risikoklasse erklärt sich eher dadurch, dass wir nur Kollektive ab einer gewissen Versicherungszahl für die Regression verwendet haben, um eine bessere lineare Regression zu erhalten (insbesondere eine verlässlichere Steigung der Regressionsgeraden, vgl. Abbildungen 7.21-7.23).

Der Varianzschätzer $\widehat{\delta}_{\mathcal{R}}^2$ beschreibt im zeitinhomogenen Credibility-Modell die Schwankung der korrekten individuellen Werte $\mu(\Theta_{ii})$ um $\mu(\Theta_i)$ herum (die Schwankung von $\mu(\Theta_i)$ wird durch τ^2 erfasst). Wir erwarten demnach eher kleine Werte für $\widehat{\delta}_{\mathcal{R}}^2$, was durch unsere Beobachtung bestätigt wird. Die alternative Schätzung derselben Varianz (welche auf einer Vereinfachung beruht) bringt hier jedoch stark abweichende, sehr tiefe Werte hervor, welche die Zeitinhomogenität im Modell kaum erfassen. Im Gegenzug wird der Schätzer für τ^2 ansteigen.

Für die Varianz zwischen den Risiken respektive zwischen den Niveaus $\mu(\Theta_i)$ (im zeitinhomogenen Modell) erhalten wir ebenfalls ähnliche Werte, wobei letztere leicht höher liegen. Die Schätzung basierend auf den alternativen $\widehat{\delta}_{\mathcal{R}}^{\prime 2}$ steigt wie erwartet noch weiter an.

Abschliessend illustrieren wir die resultierenden Regressionsgeraden der drei Risikoklassen (RK) in den Abbildungen 7.21-7.23.

7.5. STRUKTURPARAMETERSCHÄTZUNG IM EVOLUTIONÄREN MODELL 115

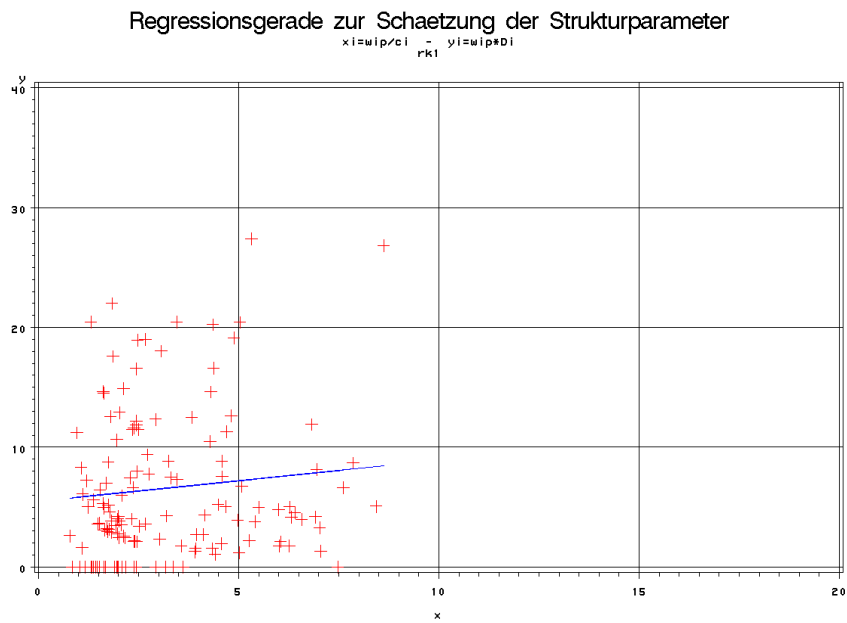


Abbildung 7.21: Regressionsgerade zur Strukturparameterschätzung in RK 1

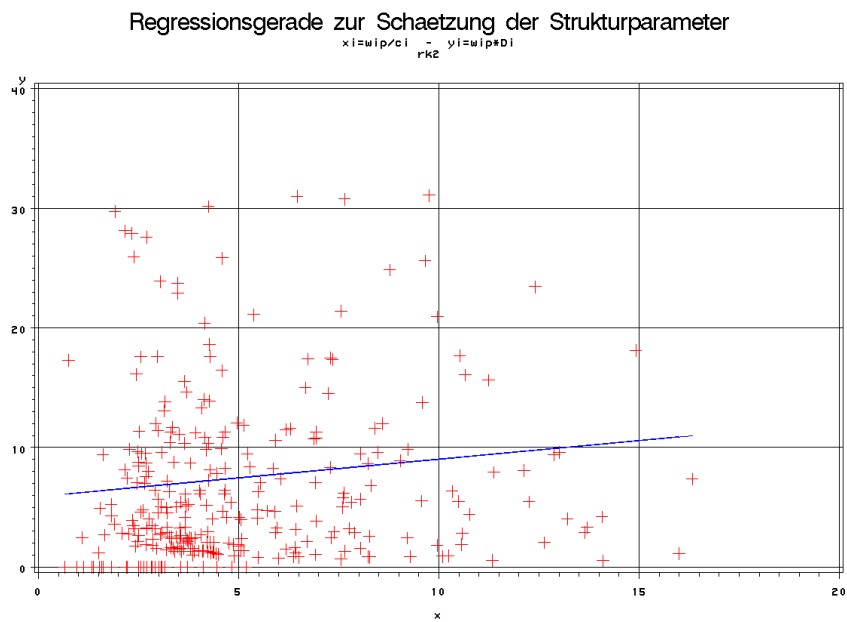


Abbildung 7.22: Regressionsgerade zur Strukturparameterschätzung in RK 2

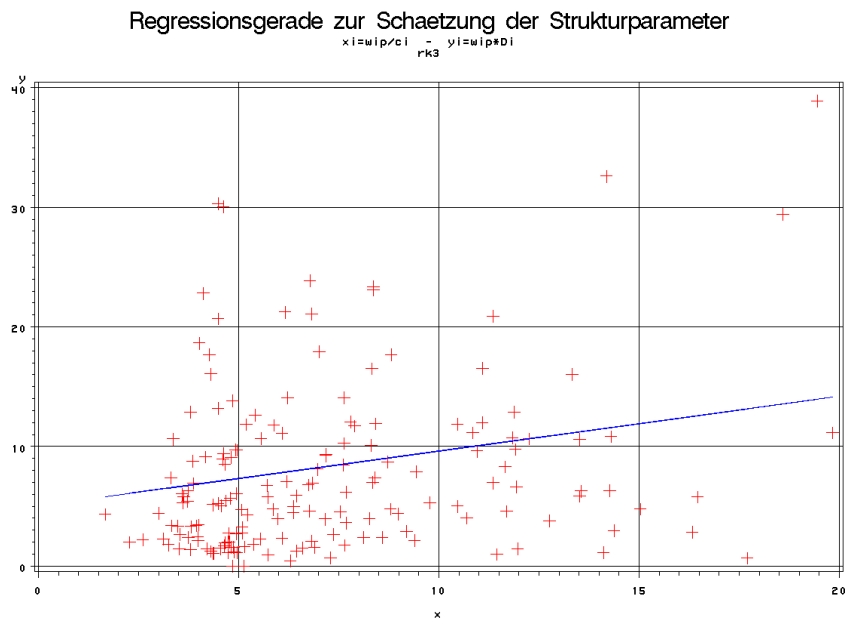


Abbildung 7.23: Regressionsgerade zur Strukturparameterschätzung in RK 3

Kapitel 8

Doppelte Bestrafung und Belohnung

Aufgrund der Art des zweistufigen Tarifierungs-Verfahrens mit Standard-Prämienniveau als 100%-Basis und risikogerechtem Pricing im Sinne eines darauf angewandten Faktors entsteht das Problem der 'doppelten Bestrafung' resp. 'doppelten Belohnung' gewisser Teilbestände in Abhängigkeit von deren Struktur. Wir gehen im ersten Unterkapitel 8.1 näher auf die Hintergründe ein und präsentieren in 8.2 eine mögliche Lösung.

8.1 Hintergrund des Problems

In den Kapiteln 6.1 auf Seite 61 und 6.2 auf Seite 63 wurde ausführlich beschrieben, auf welcher Systematik risikogerechtes Pricing im Kollektiv-Lebengeschäft beruht und was die Aufgabe eines Credibility-Modells darin ist. Die daraufhin entwickelten Credibility-Modelle in den Kapiteln 7.1 bis 7.4 sind isoliert betrachtet plausibel. Aus der zweistufigen Tarifierung heraus (wovon das Credibility-Modell die zweite Stufe repräsentiert) erwächst jedoch ein Problem. Bevor wir dieses genauer erläutern, gehen wir etwas genauer auf die erste Tarifierungsstufe ein.

Auf der ersten Stufe wird das Standard-Prämienniveau als 100%-Prämie ungeachtet der individuellen Schadenerfahrung berechnet. Hierbei fließen unter anderem die Alters- und Geschlechtsstruktur eines zu tarifierenden Kollektivs ein, und die resultierende Prämie entspricht der erwarteten Schadenssumme des jeweiligen Jahres für einen Bestand dieser Zusammensetzung. Wir führen zur formalen Beschreibung die folgende Notation ein:

Notation 8.1 (Komponenten des Standardtarifs) Wir verwenden

π_{kj}^ν	Standardtarifprämie des Versicherten k im Jahr j für die Versicherung ν
i_{kj}	Invalidisierungswahrscheinlichkeit des Versicherten k im Jahr j
b_{kj}	Barwert der versicherten Leistung des Versicherten k im Jahr j
S_{kj}^ν	Versicherungssumme des Versicherten k im Jahr j für die Versicherung ν
π_{kj}	Standardtarifprämie des Versicherten k im Jahr j
Π_{ij}	Standardtarifprämie des Kollektivs i im Jahr j
$\mathcal{K}(i)$	Menge der Versicherten in Kollektiv i ,

wobei ν für verschiedene Versicherungsleistungen, wie z.B. die Prämienbefreiung, steht.

Es gelten weiter (approximativ) die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \pi_{kj}^\nu &\propto i_{kj} \cdot b_{kj} \cdot S_{kj}^\nu & (8.1) \\ S_{kj} &= \sum_{\nu} S_{kj}^\nu \\ \pi_{kj} &= \sum_{\nu} \pi_{kj}^\nu \\ \Pi_{ij} &= \sum_{k \in \mathcal{K}(i)} \pi_{kj} \end{aligned}$$

Die Invalidisierungswahrscheinlichkeit hängt massgebend von Alter und Geschlecht ab, wobei sie mit steigendem Alter wächst. Die beiden Abbildungen 8.1 und 8.2 illustrieren für die beiden Geschlechter qualitativ den Zusammenhang zwischen Alter und besagter Wahrscheinlichkeit, invalid zu werden und nach Ablauf der Wartefrist noch invalid zu sein.

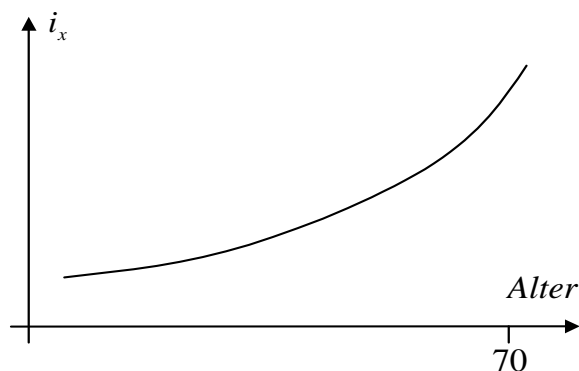


Abbildung 8.1: Invalidisierungswahrscheinlichkeit nach Alter (Männer)

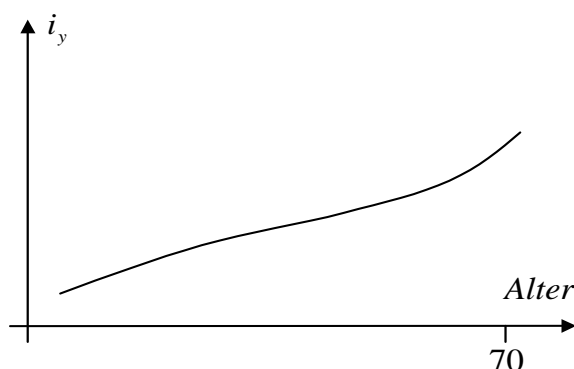


Abbildung 8.2: Invalidisierungswahrscheinlichkeit nach Alter (Frauen)

Andererseits nimmt auch der Barwert der versicherten Leistung gewichtigen Einfluss auf die 100%-Prämie. Er beinhaltet die erwarteten Rentenleistungen zwischen Invaliditätsbeginn und Schlussalter und kann als monoton fallend in Abhängigkeit vom Alter angesehen werden. Diese Aussage wird in Abbildung 8.3 qualitativ dargestellt.

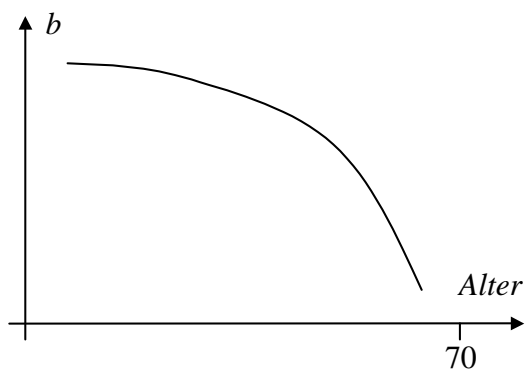


Abbildung 8.3: Barwertfaktor nach Alter

Das Produkt $i_{kj} \cdot b_{kj}$ in π_{kj}^ν , d.h. der Prämiensatz, resultiert qualitativ im konkaven Funktionsgraphen aus Abbildung 8.4 und es wird klar, dass die Alters- und Geschlechtsstruktur eines Kollektivs massgeblich dessen Standard-Prämienniveau beeinflussen. Das Problem hierbei ist, dass die Alters- und Geschlechtsstruktur eines Kollektivs auch auf dessen Risikocharakteristik im Credibility-Modell hinsichtlich Invalidität wirken. Eine Unternehmung aus der IT-Branche mit vielen jungen Mitarbeitern beispielsweise erfährt erstens eine geringe 100%-Prämie nach Standardtarif (wegen der tiefen Invalidisierungswahrscheinlichkeiten) und wird zweitens z.B. im Invalidenquoten-Modell tendentiell mit einem Abschlag tarifiert (Vorkonditionierung und a priori gute Risikocharakteristik). Gesamthaft ergibt sich also eine zu tiefe Risikoprämie.

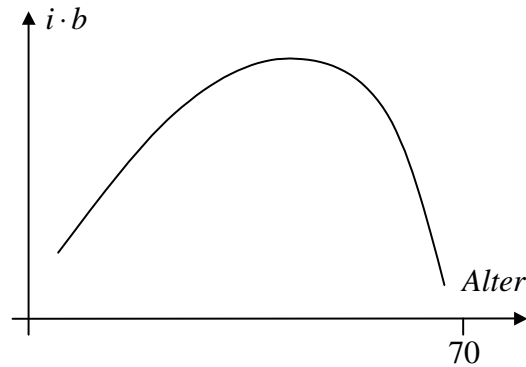


Abbildung 8.4: Prämienatz Standardtarif nach Alter

Ursache für diese doppelte Bewertung derselben Charakteristik ist die Tatsache, dass wir in den Invalidenquoten-Modellen und im Schadenraten-Modell zur Verfügung stehende a priori-Kennntnis über die Risikocharakteristik nicht berücksichtigt haben - nämlich die auf beiden Tarifierungsstufen Einfluss nehmende Alters- und Geschlechtsstruktur eines Kollektivs. Das Schadenquoten-Modell respektiert die entsprechende a priori-Kennntnis hingegen über die in der Relativbetrachtung enthaltene 100%-Prämie nach Standardtarif.

8.2 Lösung des Problems

Ein Invalidenquoten-Modell (Kapitel 7.1.2) beobachtet die *Anzahl Schadenfälle* relativ zur Versichertenzahl. Eine tiefe mittlere Invalidisierungswahrscheinlichkeit eines Kollektivs verursacht eine geringere 100%-Prämie nach Standardtarif und sorgt zudem tendentiell für eine kleinere a priori Anzahl beobachteter Schadenfälle im Invalidenquoten-Modell.

Ein Schadenraten-Modell (Kapitel 7.4.2) beobachtet die *Schadensumme* relativ zur Versichertenzahl. Eine hohe Invalidisierungswahrscheinlichkeit und ein hoher Barwert der versicherten Leistungen resultieren in einer erhöhten 100%-Prämie nach Standardtarif. Auch im Schadenraten-Modell erwarten wir damit tendentiell eine grössere a priori Schadensumme.

Die Idee ist also, die a priori erwarteten Beobachtungen μ_{ij} obiger Credibility-Modelle anhand dieser a priori-Kennntnis zu korrigieren. Wir definieren die entsprechenden Korrekturfaktoren als

$$\begin{aligned} Z_{ij}^{\text{IQ}} & \quad \text{Korrekturfaktor der a priori Erwartung im Invalidenquoten-Modell} \\ Z_{ij}^{\text{SR}} & \quad \text{Korrekturfaktor der a priori Erwartung im Schadenraten-Modell} \end{aligned}$$

und erhalten die korrekten, als bekannt vorausgesetzten a priori erwarteten Beobachtungen durch

$$\begin{aligned} \mu_{ij}^{\prime, \text{IQ}} & = \mu_{ij}^{\text{IQ}} \cdot Z_{ij}^{\text{IQ}} \\ \mu_{ij}^{\prime, \text{SR}} & = \mu_{ij}^{\text{SR}} \cdot Z_{ij}^{\text{SR}} . \end{aligned}$$

Wir haben unsere Problemstellung damit auf die Frage nach den richtigen Korrekturfaktoren Z_{ij}^{IQ} und Z_{ij}^{SR} reduziert. Diese sollten den prozentualen Einfluss der Alters- und Geschlechtsstruktur auf die Risikobeobachtung eines Kollektivs im jeweiligen Credibility-Modell widerspiegeln, und zwar relativ zum Standard-Niveau der zugehörigen Risikoklasse. Zur Vereinfachung der Notation beschränken wir uns nachfolgend auf eine Risikoklasse mit I Risiken. Unter Einsatz der Notation 8.1 auf Seite 118 und den darunter stehenden Formeln (8.1) bieten sich die folgenden Definitionen an:

$$\begin{aligned} \iota_{ij} &= \frac{1}{|\mathcal{K}(i)|} \sum_{k \in \mathcal{K}(i)} i_{kj} \\ \overline{\iota_{\bullet j}} &= \frac{1}{I} \sum_i \iota_{ij} \\ \kappa_{ij} &= \frac{\sum_{k \in \mathcal{K}(i)} \pi_{kj}}{\sum_{k \in \mathcal{K}(i)} S_{kj}} \\ \overline{\kappa_{\bullet j}} &= \frac{\sum_k \pi_{kj}}{\sum_k S_{kj}} \end{aligned}$$

Hierbei sind ι_{ij} die durchschnittliche Invalidisierungswahrscheinlichkeit des Kollektivs i im Jahr j und $\overline{\iota_{\bullet j}}$ der analoge Mittelwert der Risikoklasse. κ_{ij} ist der mittlere Prämienatz eines Kollektivs i im Jahr j und $\overline{\kappa_{\bullet j}}$ der entsprechende Durchschnitt der Risikoklasse. Unser Vorschlag für die Korrekturfaktoren lautet somit

$$\begin{aligned} Z_{ij}^{\text{IQ}} &= \frac{\iota_{ij}}{\overline{\iota_{\bullet j}}} \\ Z_{ij}^{\text{SR}} &= \frac{\kappa_{ij}}{\overline{\kappa_{\bullet j}}}. \end{aligned}$$

In den nachfolgenden beiden Kapiteln stellen wir die Schlussresultate der auf diese Art korrigierten Credibility-Modelle (mit μ'_{ij} statt μ_{ij}) vor und ziehen den Vergleich zu den unkorrigierten Modellen.

8.3 Korrigiertes Invalidenquoten-Modell

A priori Erwartungen Für die korrigierten a priori Erwartungen ergeben sich die aus Tabelle 8.1 ersichtlichen Werte.

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\mu_{\mathcal{R},1}$	0.0163	0.067
1	$\mu_{\mathcal{R},6}$	0.0214	0.081
2	$\mu_{\mathcal{R},1}$	0.0479	0.171
2	$\mu_{\mathcal{R},6}$	0.0360	0.135
3	$\mu_{\mathcal{R},1}$	0.0903	0.277
3	$\mu_{\mathcal{R},6}$	0.0685	0.224

Tabelle 8.1: Durchschnittliche korrigierte a priori erwartete Anzahl Invalide

Im Vergleich zu den unkorrigierten Werten aus Tabelle 7.2 auf Seite 71 stellen wir fest, dass die Mittelwerte der korrigierten a priori Erwartungen alle tiefer liegen bei geringerer Varianz. Da die Korrekturfaktoren Z_{ij}^{IQ} den Mittelwert 1 aufweisen bedeutet unsere Beobachtung, dass viele kleine Kollektive mit einer Korrektur kleiner 1 versehen worden sind.

Risikointerne Varianz Die entsprechende Schätzung der inneren Varianz ergibt Tabelle 8.2.

\mathcal{R}	$\widehat{\sigma}_{\mathcal{R}}^2$
1	1.058
2	0.919
3	0.948

Tabelle 8.2: Geschätzte innere Varianz je Risikoklasse

Wir beobachten in allen Risikoklassen einen Anstieg der risikointernen Varianz gegenüber den Schätzungen in Tabelle 7.5 auf Seite 73.

Varianz zwischen den Risiken Tabelle 8.3 führt die äussere Varianz je Risikoklasse im korrigierten Modell auf.

\mathcal{R}	$\widehat{\tau}_{\mathcal{R}}^2$
1	0.792
2	0.536
3	0.314

Tabelle 8.3: Geschätzte äussere Varianz je Risikoklasse

Auch die äussere Varianz ist angestiegen, was durch den zusätzlichen 'Freiheitsgrad' Z_{ij}^{IQ} zwischen den Risiken erklärt wird.

Credibility-Koeffizient Die resultierenden Credibility-Koeffizienten sinken gegenüber dem unkorrigierten Modell leicht in den ersten beiden Risikoklassen und etwas stärker in der dritten Klasse (vgl. Tabelle 8.4). Dies hat zur Folge, dass die Credibility-Gewichte im korrigierten Modell im Durchschnitt ansteigen und die individuelle Risikobeobachtung damit stärker gewichtet wird.

\mathcal{R}	$\kappa_{\mathcal{R}}$
1	1.34
2	1.71
3	3.02

Tabelle 8.4: Credibility-Koeffizient je Risikoklasse

Tariffaktoren Für die gewichteten durchschnittlichen Tariffaktoren ergeben sich wieder erwartungsgemäss Werte in der Nähe der Standardniveaus 0.8, 1.0 und 1.2. Die Spannweite der Tariffaktoren ist gegenüber dem unkorrigierten Invalidenquoten-Modell gewachsen - das korrigierte Modell differenziert etwas stärker (vgl. Tabelle 7.10 auf Seite 75).

\mathcal{R}	var	min	max	mean	std
1	$\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}$	0.113	3.951	0.815	0.415
2	$\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}$	0.095	4.210	1.035	0.469
3	$\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}$	0.363	4.011	1.226	0.457
alle	$\widehat{t(\Theta_{\bullet})}$	0.095	4.210	1.028	0.476

Tabelle 8.5: Gewichtete Statistik der Tariffaktoren je Risikoklasse

Abbildung 8.5: Credibility-Gewichte Durch die Korrektur ergibt sich ein weiter gestreutes Bild im Vergleich zu Kapitel 7.1.3, und die Risikoklassen lassen sich kaum mehr unterscheiden. Insgesamt steigen die Credibility-Gewichte jedoch im Durchschnitt leicht an.

Abbildungen 8.6-8.8: Tariffaktoren Auch für die Tariffaktoren ergeben sich breiter gestreute Kegel. Es ist anzumerken, dass eine stärkere Differenzierung stattfindet - die verschiedenen 'Starts' (einzelne Schadenfälle bei kleinen Kollektiven) liegen weiter voneinander entfernt. Im Gegenzug verlaufen die Kegel steiler, d.h. grössere Kollektive können rascher zu einem tieferen Tariffaktor gelangen als im unkorrigierten Modell.

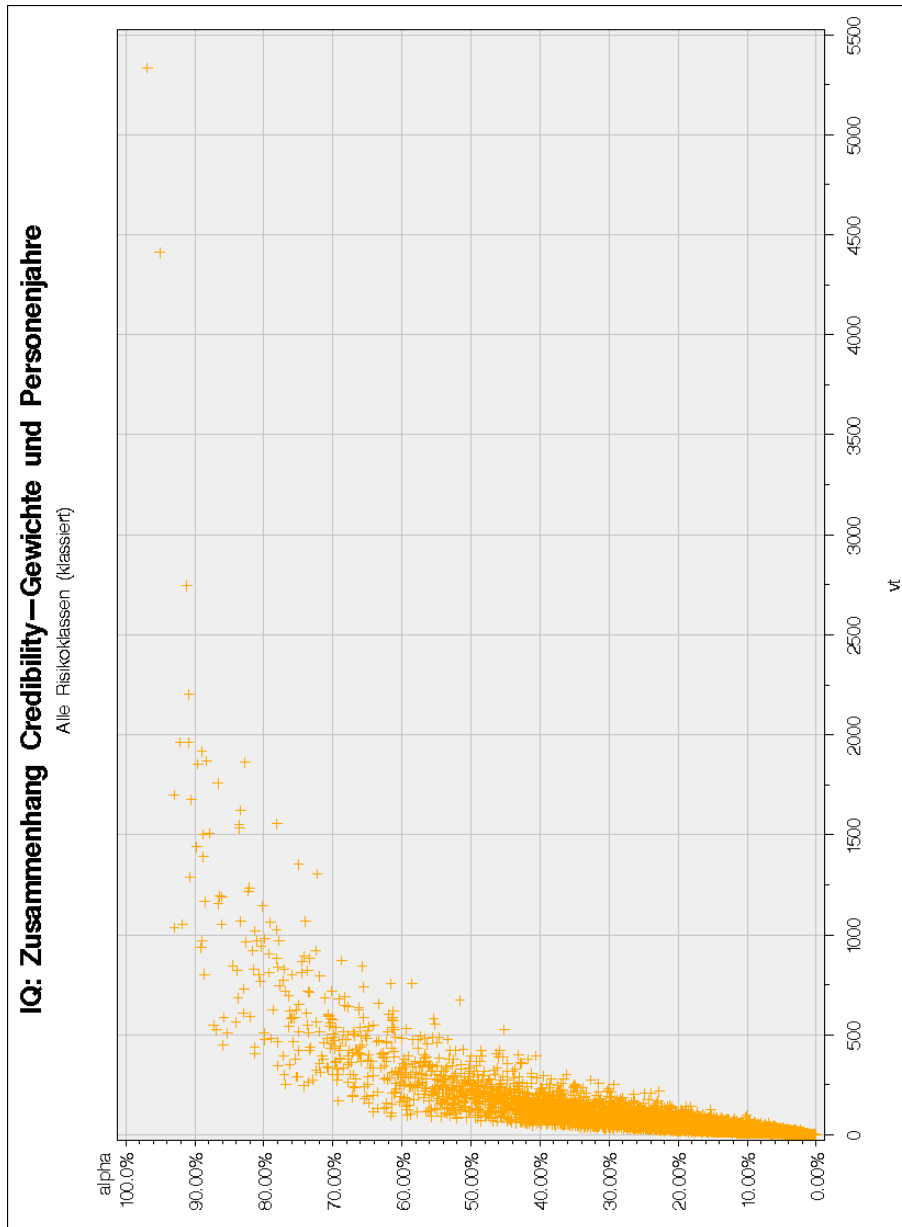


Abbildung 8.5: Korrigierte Credibility-Gewichte nach Personenjahren

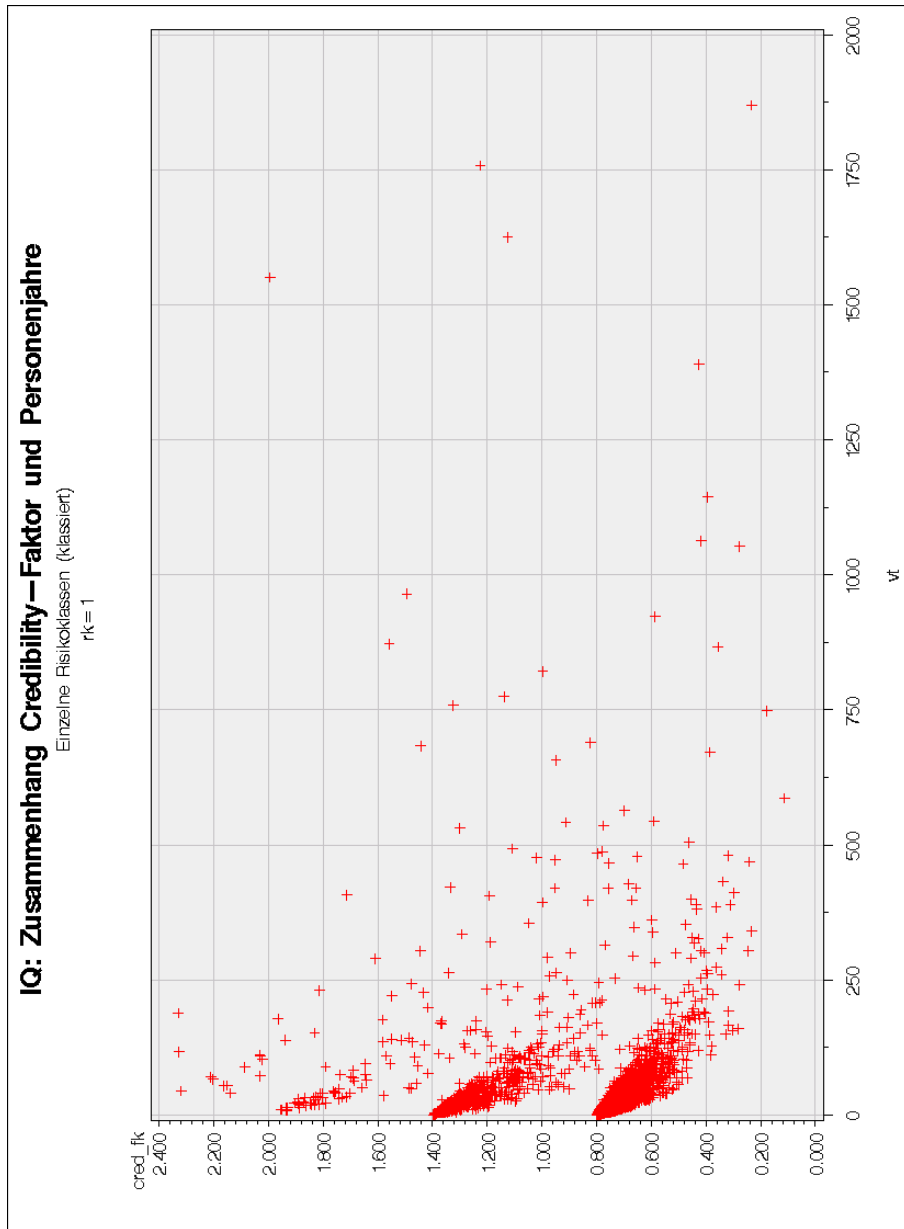


Abbildung 8.6: Korrigierter Credibility-Faktor der RK 1 nach Personenjahren

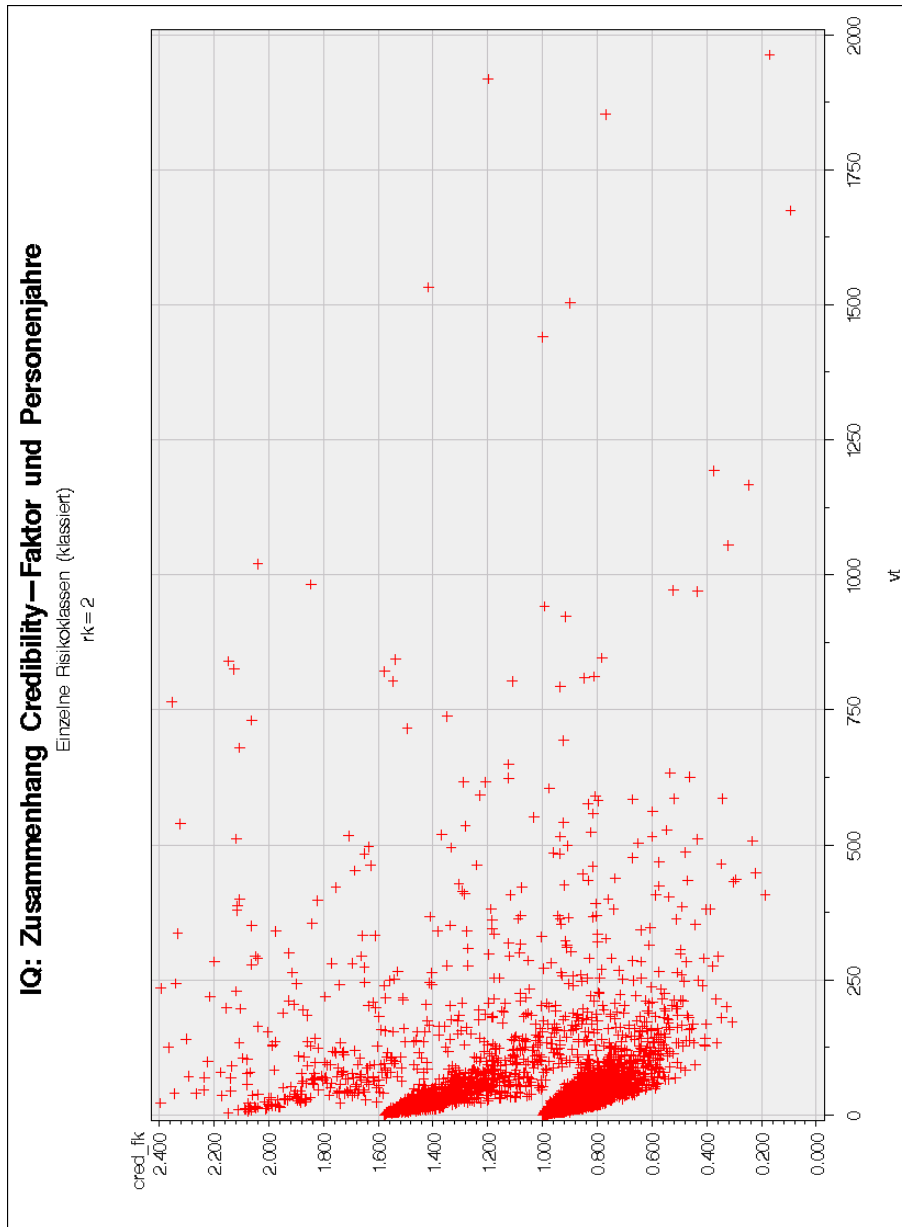


Abbildung 8.7: Korrigierter Credibility-Faktor der RK 2 nach Personenjahren

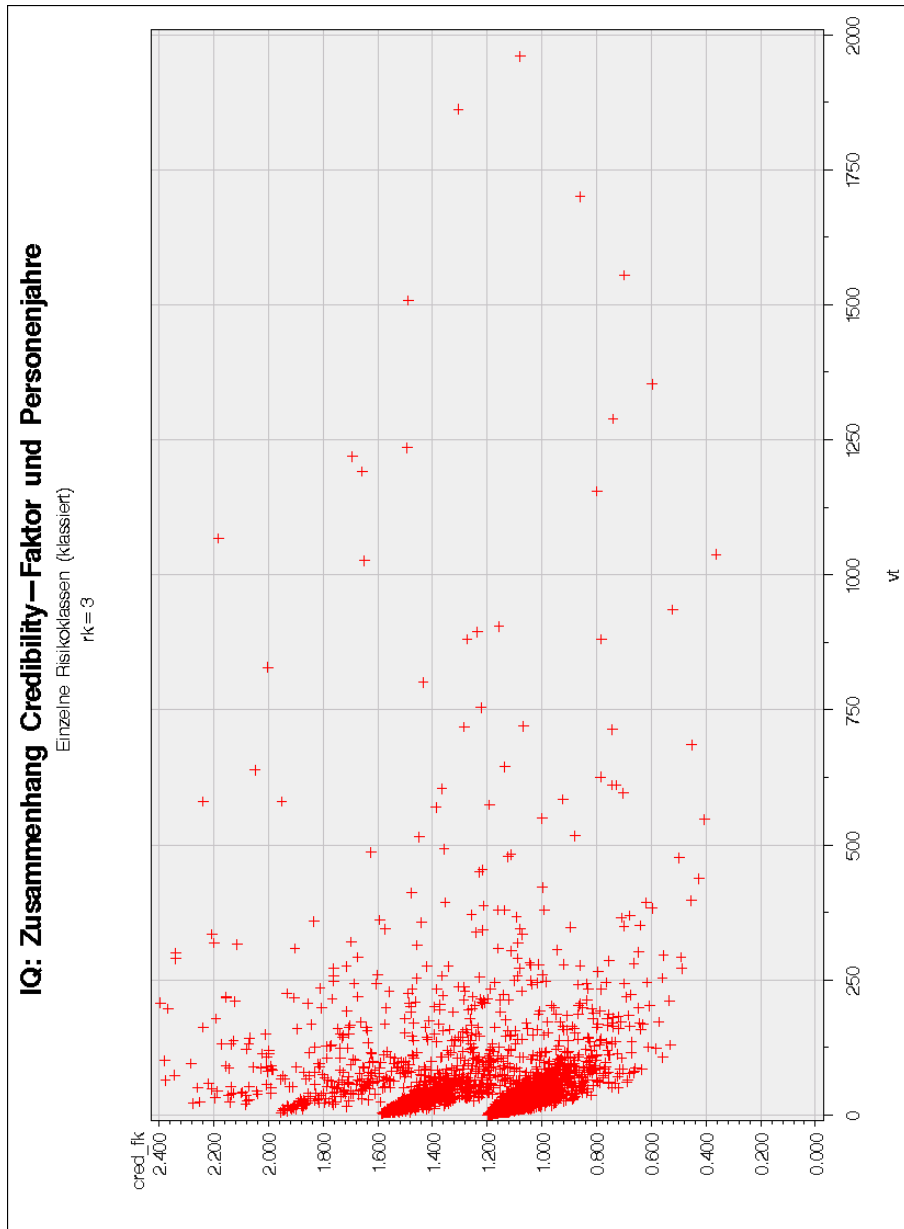


Abbildung 8.8: Korrigierter Credibility-Faktor der RK 3 nach Personenjahren

8.4 Korrigiertes Schadenraten-Modell

A priori Erwartungen Für die korrigierten a priori Erwartungen ergeben sich die in Tabelle 8.6 ersichtlichen Werte.

\mathcal{R}	var	mean	std
1	$\mu_{\mathcal{R},1}$	10'276	26'116
1	$\mu_{\mathcal{R},6}$	15'569	28'537
2	$\mu_{\mathcal{R},1}$	32'409	50'248
2	$\mu_{\mathcal{R},6}$	19'885	40'632
3	$\mu_{\mathcal{R},1}$	46'869	66'633
3	$\mu_{\mathcal{R},6}$	37'936	54'833

Tabelle 8.6: Korrigierte a priori erwartete Anzahl Invalide

Im Vergleich zu den unkorrigierten Werten aus Tabelle 7.32 auf Seite 106 stellen wir fest, dass die Mittelwerte der korrigierten a priori Erwartungen wie schon im korrigierten Invalidenquoten-Modell alle tiefer liegen bei geringerer Varianz. Da die Korrekturfaktoren Z_{ij}^{IQ} den Mittelwert 1 aufweisen bedeutet unsere Beobachtung, dass viele kleine Kollektive mit einer Korrektur kleiner 1 versehen worden sind.

Risikointerne Varianz Die zugehörige Schätzung der inneren Varianz ergibt Tabelle 8.7.

\mathcal{R}	$\widehat{\sigma}_{\mathcal{R}}^2$
1	758'502
2	433'393
3	380'020

Tabelle 8.7: Geschätzte innere Varianz je Risikoklasse

Wir beobachten in allen Risikoklassen wiederum einen Anstieg der risikointernen Varianz gegenüber den Schätzungen in Tabelle 7.35 auf Seite 107.

Varianz zwischen den Risiken Tabelle 8.8 führt die äussere Varianz je Risikoklasse im korrigierten Modell auf.

\mathcal{R}	$\widehat{\tau}_{\mathcal{R}}^2$
1	0.845
2	0.020
3	0.181

Tabelle 8.8: Geschätzte äussere Varianz je Risikoklasse

Wir haben zur Schätzung dieser Strukturparameter dieselben Einschränkungen auf dem Bestand vorgenommen, um positive Varianzen zu erhalten. Die äussere Varianz in Risikoklasse 2 ist dennoch sehr klein und führt zu sehr geringen

Credibility-Gewichten, so dass die individuelle Risikobeobachtung quasi nicht berücksichtigt wird. In Risikoklasse 1 hingegen ist die Varianz immens gestiegen. Der Einfluss der Korrekturgrösse Z_{ij}^{SR} sorgt hier für viel Inhomogenität.

Credibility-Koeffizient Der Credibility-Koeffizient hat sich gemäss Tabelle 8.9 in Risikoklasse 3 verdoppelt und steigt in der zweiten Klasse auf einen sehr hohen Wert an. In Klasse 1 ist er jedoch stark gesunken und führt dort zu hohen Credibility-Gewichten.

\mathcal{R}	$\kappa_{\mathcal{R}}$
1	0.9 Mio.
2	> 20 Mio.
3	2.1 Mio.

Tabelle 8.9: Credibility-Koeffizient je Risikoklasse

Tariffaktoren Für die gewichteten durchschnittlichen Tariffaktoren ergeben sich erneut erwartungsgemäss Werte in der Nähe der Standardniveaus 0.8, 1.0 und 1.2. Die Spannweite der Tariffaktoren ist in Risikoklasse 2 aufgrund des hohen Credibility-Koeffizienten sehr eingeschränkt bei entsprechend tiefer Variabilität - auch Risikoklasse 3 weist eine kleinere Spannweite auf im Vergleich zu Tabelle 7.40 auf Seite 108. In Risikoklasse 1 wird dafür stärker differenziert.

\mathcal{R}	var	min	max	mean	std
1	$\widehat{\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	0.42	2.43	0.801	0.252
2	$\widehat{\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	0.90	1.14	0.999	0.027
3	$\widehat{\widehat{t(\Theta_{\mathcal{R}})}}$	0.67	1.98	1.197	0.225
alle	$\widehat{\widehat{t(\Theta_{\bullet})}}$	0.42	2.43	0.967	0.241

Tabelle 8.10: Gewichtete Statistik der Tariffaktoren je Risikoklasse

Abbildung 8.9: Credibility-Gewichte Durch die Korrektur ergibt sich im Vergleich ein gestreueres Bild, wobei sich Risikoklasse 2 klar mit tiefen Gewichten abgrenzt.

Abbildung 8.10: Tariffaktoren Wir erkennen klar die drei Risikoklassen, wobei der grafische Zweig der Risikoklasse 3 wie zuvor das stärkste Gefälle aufweist. Ein Kollektiv in Risikoklasse 2 kann sich aufgrund der tiefen Credibility-Gewichte jedoch kaum mehr vom Standardniveau wegbewegen.

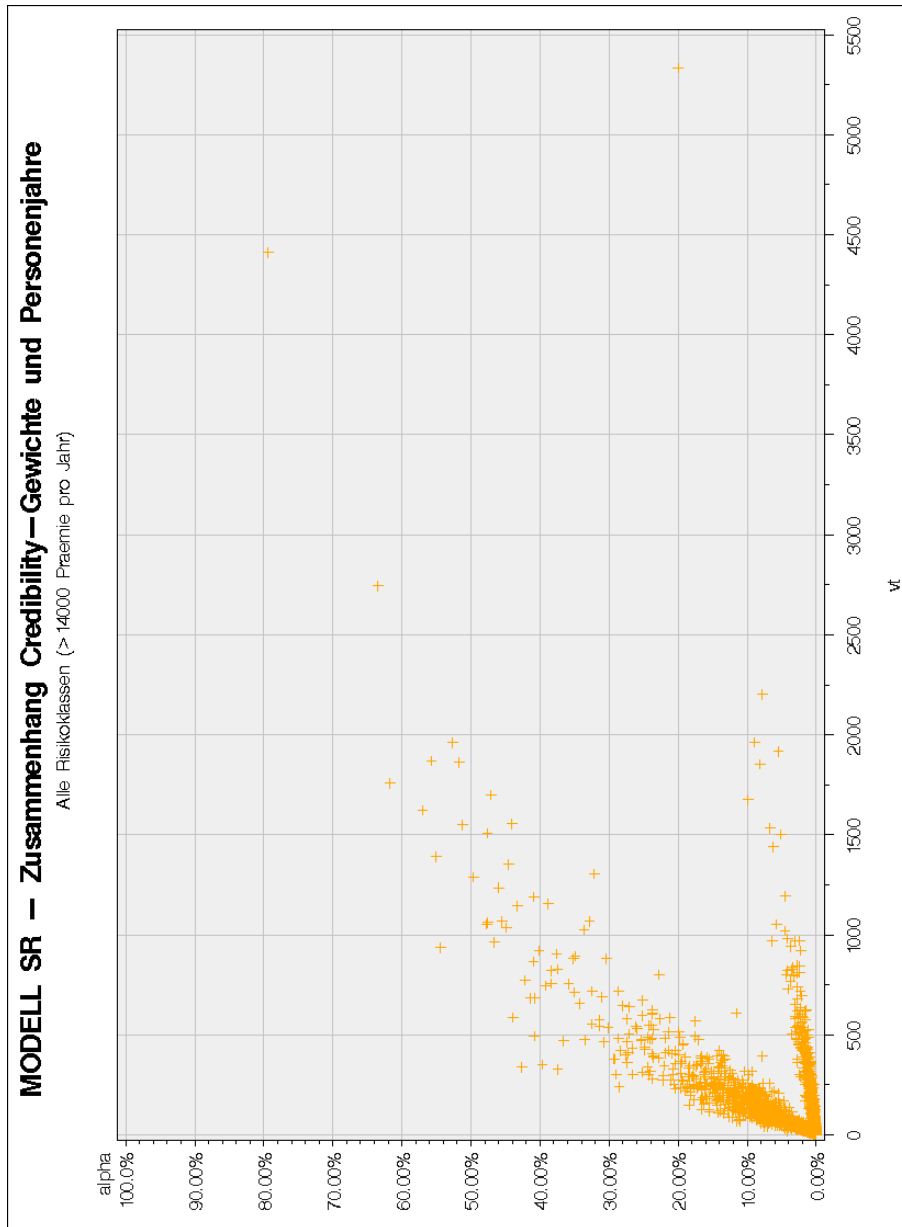


Abbildung 8.9: Korrigierte Credibility-Gewichte nach Prämiensumme

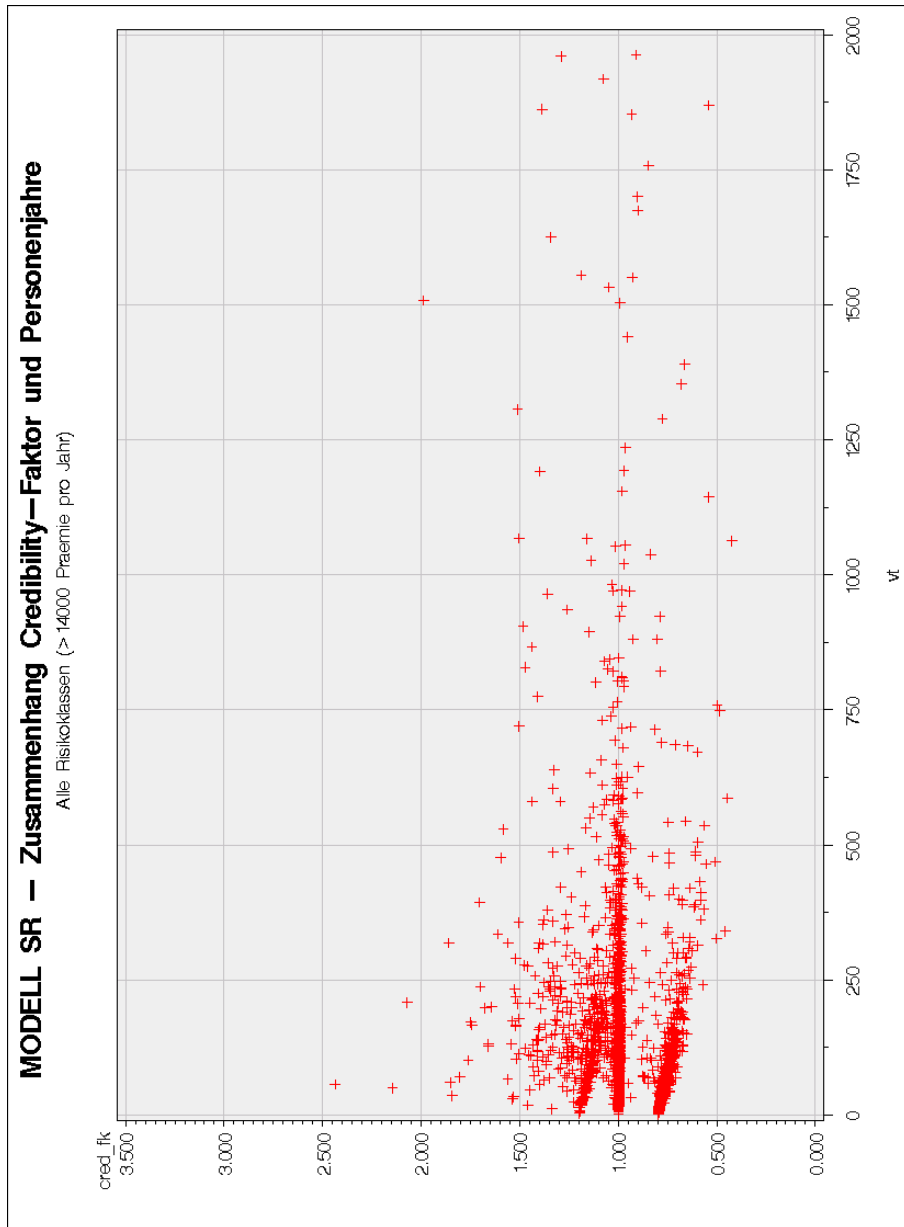


Abbildung 8.10: Korrigierter Credibility-Faktor aller Klassen nach Prämiensumme

Kapitel 9

Eine neue Risikoklassenzuteilung

9.1 Motivation

In allen vorangehenden Kapiteln des praktischen Teils wurde mit einer Vorkonditionierung in Form von gegebenen Risikoklassen gearbeitet wie in Kapitel 6.1.3 auf Seite 62 besprochen. Auf ein Verfahren zur Zuordnung der Branchen zu einer Risikoklasse anhand ihrer NOGA-Codes sind wir bislang nicht eingegangen.

Die besprochenen Credibility-Modelle für Invalidenquoten, Schadenquoten, gewichtete Invalidenquoten und Schadenraten können alle auch ohne Vorkonditionierung (beziehungsweise für eine einzige Risikoklasse, welche alle Kollektive enthält) angewandt werden - die zur Berechnung verwendeten Makros wurden dementsprechend flexibel programmiert. Ziel ist es, jeden (zweistelligen) NOGA-Code alter Systematik 2002 oder auch neuer Systematik 2008 mittels Credibility einer der drei Risikoklassen zuzuordnen. Wir wenden unsere Modelle also nicht auf den Versichertenbestand mit den zu tarifierenden Kollektiven selbst an, sondern komprimieren die Daten zunächst zu einem Datensatz auf Stufe NOGA-Codes. Anschliessend kann wie gewohnt fortgefahren werden, wobei eine gesamte Branche nun an die Stelle eines vorherigen Risikos tritt. Gerade Credibility ist für solche Fälle mit eher wenig Daten gut gerüstet.

Eine Gruppierung in Risikoklassen allein ist nicht die gesamte Aufgabe - jeder Risikoklasse muss ein a priori Klassenmittel gegeben sein, von welchem aus einzelne Risiken später prozentual abweichen können. Zu diesem Zweck wenden wir erneut unsere Credibility-Modelle auf Stufe Risikoklasse an und erhalten die Klassen-Tariffaktoren als Credibility-Schätzer.

9.2 Risikoklassen-Zuordnung

Die für unsere Credibility-Modelle benötigten Felder sind die Versichertenzahl, die gewichtete und ungewichtete Invalidenzahl, die Prämie und die Rückstellung. Die einfache Summation dieser Werte klassiert nach vorhandenen (zweistelligen) NOGA-Codes bringt einen analogen Datensatz auf Stufe NOGA-Code hervor, den wir direkt im Rahmen unserer Modelle (ohne Vorkonditionierung) anwenden

können. Wir merken an dieser Stelle an, dass wir unsere globalen Annahmen 6.1 und 6.4 (auf den Seiten 63 und 65) entsprechend vereinfachen müssen.

Sind die Credibility-Schätzer berechnet, stellt sich die Frage, wie man aufgrund der Schätzer eine Klassenzuordnung vornehmen will. Eine Möglichkeit wäre, zwei Schranken zu definieren, welche die Credibility-Schätzer der NOGA-Codes in drei Bereiche aufteilen, die im Anschluss die Risikoklassen repräsentieren. Die Wahl dieser Schranken ist frei, man kann also beispielsweise mit der Grösse der entstehenden Risikoklassen oder einer Symmetrie argumentieren und die Schranken entsprechend wählen.

9.3 Ermittlung der Klassen-Tariffaktoren

Um in einem zweiten Schritt die Standard-Tariffaktoren jeder Risikoklasse zu bestimmen, benötigen wir eine weitere Kompression des Datensatzes basierend auf der NOGA-Code-Zuteilung des vorangehenden Abschnitts. Wiederum summieren wir die benötigten Datenfelder klassiert nach der neu definierten Risikoklasse und erhalten einen Datensatz auf Stufe Risikoklasse. Nach der gewohnten Tarifierung mittels Credibility (die Credibility-Gewichte werden alle nahe 100% liegen, so dass die individuelle Risikoerfahrung fast alleine massgebend ist) erhalten wir direkt einen risikogerechten Tariffaktor je Risikoklasse. Gegebenenfalls kann eine zentrische Streckung um das mittlere Niveau des Gesamtbestands (100%) vorgenommen werden.

9.4 Resultat

Wir haben mittels des korrigierten Invalidenquoten-Modells und des Schadenquoten-Modells eine entsprechende Neuzuteilung der NOGA-Codes in drei Risikoklassen vorgenommen. Die genaue Zusammenstellung führen wir nicht auf. Für unseren Teilbestand ergeben sich jedoch die Klassen-Tariffaktoren wie in Tabelle 9.1 ersichtlich. Es ist klar erkennbar, dass unsere mittlere neue Risikoklasse risikogerecht ein Niveau unter 100% erhält. Des Weiteren diversifiziert das Schadenquoten-Modell stärker (besonders in der Klasse schlechter Risiken).

\mathcal{R}	$\ell_{\mathcal{R}}^{\text{IQ}}$	$\ell_{\mathcal{R}}^{\text{SQ}}$
1	61%	58%
2	95%	98%
3	144%	171%

Tabelle 9.1: Standard-Tarifniveaus der drei Risikoklassen

Literaturverzeichnis

- [BG05] Bühlmann, H. und Gisler, A. (2005). A Course in Credibility Theory and its Applications. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [BS70] Bühlmann, H. und Straub, E. (1970). Glaubwürdigkeit für Schadensätze. Bulletin of Swiss Ass. of Act., Seiten 111–133.
- [Gis90] Gisler, A. (1990). Credibility Theory Made Easy. Mitteilungen der Schweiz. Vereinigung der Versicherungsmathematiker, Heft 1/1990, Seiten 75-100.
- [KOF07] Konjunkturforschungsstelle der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich (2007). Konjunkturbarometer. Pressemitteilung vom 28.12.2007, 11:30. Verfügbar unter <http://www.kof.ethz.ch/konjunktur> am 20.01.2008.
- [Mac00] Mack, T. (2000). Credible claims reserves: The Benktander method. ASTIN Bulletin 30/2, Seiten 333-347.

Index

- 100 Prozent-Prämie, 61, 62, 83, 87, 105, 117, 119
- Allgemeines Intuitives Prinzip, 6, 18, 33, 37
- Antiselektion, 62
- Bühlmann-Straub, 15, 20–24, 27–29, 31, 33, 35, 37, 38, 43, 51–54, 68, 84, 105
- Bayes-Schätzer, 3, 4
- Beobachtungsvektor, 3, 5, 6, 9, 12, 22, 24, 68, 72
- biasfrei, 4, 11
- Credibility-Gewicht, 19
- Credibility-Koeffizient, 7
- Credibility-Schätzer
homogener, 4–6
inhomogener, 3–6
- exogene Information, 15, 16, 19, 21–23, 27–29, 33, 37, 39
- Hierarchischer Baum, 50, 51
- Hierarchisches Modell, 53
- Hilbert-Raum, 4, 22, 47
- Homogenität, 43, 44, 62, 63, 65
- IBNR-Effekt, 63, 69, 72, 85
- Makro
apfactmu, 70, 71, 85, 96
makecred, 74, 87, 96
rbvectsuf, 72, 85, 96
sigma2, 73, 86, 96
tau2, 73, 86, 96
- NOGA-Code, 62, 133, 134
- Normalgleichungen, 5
- Orthogonalität, 32
- Präzision, 6, 18
- Projektion
iterative, 4
orthogonale, 4
- quadratischer Verlust, 3, 6
- Regression, 43, 54, 114
- Risikocharakteristik, 3, 5, 22, 24, 43, 45, 62, 64, 67, 119
- Risikoklasse, 12, 62, 63
- Risikoprämie, 62
- Schadenrate, 105
- Spätschaden, 63
- Standard-Prämienniveau, 61
- Standardtarif, 61
- Strukturparameter, 5, 11, 16, 19, 53, 69, 85, 96, 114
- suffiziente Statistik, 72
- Varianz
äussere, 6, 11, 19, 49, 51, 70, 73, 86
innere, 6, 11, 19, 49, 53, 70, 73, 86, 114, 122, 128
- Variationskoeffizient, 7
- Volumenmass, 69, 85, 96
- Vorkonditionierung, 62

Teil IV

SAS-Programmcode

